This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

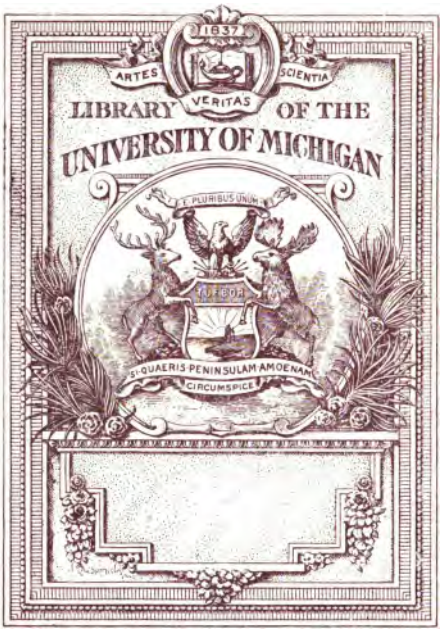
+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`



THE GIFT OF
Prof. Alex. Ziwet

QA
841
.G52

M. CH. GIRAULT.

Contents.

.- De l'accélération transmise d'un corps solide a un autre...

.- Premiers principes...d.excentriques et des engrenages.

.- Théorémes généraux relatifs a la transmission du mouvement.

- Théorémes généraux relatifs a la transmission du mouvement par contact immediat.

- De la transmission de l'accélération..

CINÉMATIQUE

DE L'ACCÉLÉRATION

TRANSMISE

D'UN CORPS SOLIDE A UN AUTRE

PAR CONTACT IMMÉDIAT

PAR

M. Ch. GIRAULT

Professeur à la Faculté des Sciences de Caen

CAEN

IMPRIMERIE DE F. LE BLANC-HARDEL

RUE FROIDE, 2 ET 4

1871

26574

CINÉMATIQUE

DE L'ACCÉLÉRATION

TRANSMISE

D'UN CORPS SOLIDE A UN AUTRE

PAR CONTACT IMMÉDIAT

PAR

M. Ch. GIRAULT

Professeur à la Faculté des Sciences de Caen

CAEN

IMPRIMERIE DE F. LE BLANC-HARDEL

RUE FROIDE, 2 ET 4

1871

Extrait des Mémoires de l'Académie des Sciences, Arts et Belles-Lettres de Caen.

Gift of
Prof. A. Ziwet
Sept, 13 19..

CINÉMATIQUE

DE L'ACCÉLÉRATION

TRANSMISE

D'UN CORPS SOLIDE A UN AUTRE

PAR CONTACT IMMÉDIAT

§ 1er. — DE L'ACCÉLÉRATION TRANSMISE, DANS LE CAS DE DEUX MOUVEMENTS RECTILIGNES.

ARTICLE 1er. — Cas où les surfaces S et S' qui limitent les deux corps solides, sont des cylindres parallèles entre eux et perpendiculaires aux directions des déplacements rectilignes.

1. PREMIER LEMME *relatif au déplacement infiniment petit d'une droite dans un plan.*

On suppose que, la droite CC' (fig. 1) passant à la position infiniment voisine DD' sans changer de longueur, sa direction nouvelle forme avec sa direction primitive un angle CID représenté par *i*. On mène les droites DE et D'E' perpendiculaires à CC', et dont la première, prolongée, va rencontrer en F la parallèle D'F à CC'.

166722

Le triangle rectangle $DD'F$ donne

$$D'F = DD'.\cos i, \quad DF = DD'.\sin i;$$

d'où l'on conclut, à des infiniment petits près négligeables,

$$EE' = CC', \quad DE + D'E' = CC'.i.$$

De là on tire d'abord $CE = C'E'$, ou

$$CD.\cos DCE = C'D'.\cos D'C'E',$$

ensuite

$$CD.\sin DCE + C'D'.\sin D'C'E' = CC'.i.$$

Ces deux dernières relations reviennent aux suivantes :

$$(1) \qquad v\cos\varphi - v'\cos\varphi' = o,$$

$$(2) \qquad (v\sin\varphi + v'\sin\varphi')\,dt = CC'.i,$$

où v et v' représentent les vitesses des points C et C', où φ et φ' sont les angles que forment ces vitesses avec la direction CC', de part et d'autre de CC'.

2. *Vitesses simultanées* v *et* v' *des deux corps solides.* On suppose le plan de la fig. 2 parallèle aux directions des translations, lesquelles sont représentées par les droites OV et OV' issues du point O. Ce plan détermine, dans les cylindres S et S', les sections droites MG et M'G' extérieurement tangentes l'une à l'autre au point T, et ayant les points C et C' pour centres de courbure respectifs, en sorte que CC' est la normale commune. Soient M et M' les points par

lesquels se toucheront MG et M′G′ au bout du temps dt; la normale à MG en M passe en C, la normale à M′G′ en M′ passe en C′, et l'on a sensiblement

$$CM = CT, \qquad C'M' = C'T.$$

Donc, après le déplacement élémentaire, lorsque les droites CM et M′C′ sont venues se placer sur le prolongement l'une de l'autre, la distance CC′ est restée la même. C'est donc comme si la droite CC′ s'était infiniment peu déplacée sans changer de longueur. En conséquence, on peut appliquer la formule

$$v \cos\varphi - v' \cos\varphi' = 0, \tag{3}$$

établie au n° 1, dans laquelle v et v' représentent ici les vitesses de translation des cylindres S et S′, en même temps que φ et φ' sont les angles formés par OV et OV′ avec la droite ON parallèle à la normale commune CC′.

2. *Accélérations simultanées* $\frac{dv}{dt}$ *et* $\frac{dv'}{dt}$.

Que l'on dérive la formule (3) par rapport au temps, et l'on obtient

$$\frac{dv}{dt}\cos\varphi - \frac{dv'}{dt}\cos\varphi' = v\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt} - v'\sin\varphi'\frac{d\varphi'}{dt}.$$

Mais la somme $\varphi + \varphi'$ est constamment égale à l'angle VOV′ des directions des translations rectilignes; on a donc

$$\frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\varphi'}{dt} = 0,$$

et, par conséquent,

$$\frac{dv}{dt}\cos\varphi - \frac{dv'}{dt}\cos\varphi' = (v\sin\varphi + v'\sin\varphi')\frac{d\varphi}{dt}.$$

Dans cette égalité, $d\varphi$ représente l'angle des deux directions consécutives de la droite CC'; c'est donc l'angle i de la formule (2). D'ailleurs CC' y est égal à la somme des rayons de courbure, et, si l'on pose

$$CT = \rho, \quad C'T = \rho',$$

cette formule (2) peut s'écrire

$$(v\sin\varphi + v'\sin\varphi')\,dt = (\rho + \rho')\,d\varphi,$$

ou

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{v\sin\varphi + v'\sin\varphi'}{\rho + \rho'}.$$

On en conclut, entre les accélérations des mouvements rectilignes, la relation

$$(4)\quad \frac{dv}{dt}\cos\varphi - \frac{dv'}{dt}\cos\varphi' = \frac{(v\sin\varphi + v'\sin\varphi')^2}{\rho + \rho'},$$

dans laquelle la somme $\rho + \rho'$ se change en une différence, s'il s'agit d'un contact intérieur des lignes MG et M'G'.

Ainsi, les formules (3) et (4) déterminent v et $\frac{dv}{dt}$, quand on connaît v' et $\frac{dv'}{dt}$, ou réciproquement.

On peut d'ailleurs, comme on va le voir, faire figurer dans le second membre de la dernière, le carré de la vitesse de glissement.

4. *Vitesse de glissement* u.

L'arc élémentaire de glissement *udt* n'est autre que la somme TM + TM′ des chemins parcourus sur les lignes MG et M′G′, dans le temps *dt*, par le point de contact. Or, les angles en C et C′ (fig. 2) sont égaux à $d\varphi$; on a donc

$$TM = \rho d\varphi, \quad TM' = \rho' d\varphi,$$

puis

$$udt = (\rho + \rho')\, d\varphi,$$

puis, après division par *dt* et substitution de la valeur précédemment trouvée pour $\frac{d\varphi}{dt}$,

$$u = v \sin\varphi + v' \sin\varphi'. \tag{5}$$

La formule (4) peut donc s'écrire encore

$$\frac{dv}{dt}\cos\varphi - \frac{dv'}{dt}\cos\varphi' = \frac{u^2}{\rho + \rho'}.$$

ARTICLE 2. — Cas de deux corps solides terminés par des surfaces S et S′ quelconques.

5. *Recherche des points* M *et* M′ *par lesquels se touchent, au bout du temps* dt, *les surfaces* S *et* S′.

On suppose le plan de la figure 3 parallèle aux directions des translations et renfermant, à l'époque *t*, le point T de contact des surfaces S et S′. On prend ce point T pour origine de trois axes rectangulaires TX, TY et TZ, dont le premier est la projection de la normale commune sur le plan de la figure,

et dont le second est la trace, sur le même plan, du plan tangent commun.

Dans le voisinage du point T, les équations des surfaces S et S′ prennent la forme

$$z = kx + lx^2 + mxy + ny^2,$$
$$z' = kx' + l'x'^2 + m'x'y' + n'y'^2.$$

La valeur du coefficient k dépend de l'inclinaison du plan tangent commun sur le plan XTY; les coefficients l, m, n sont déterminés quand on connaît, en grandeur et en direction, les courbures principales de la surface S au point T; les coefficients l', m', n' s'obtiennent au moyen des mêmes éléments de la surface S′.

Les déplacements des deux corps solides étant parallèles au plan XTY, il en résulte que les points M et M′ par lesquels ils se touchent au bout du temps dt, sont situés à une même distance infiniment petite h du plan XTY. Nous supposerons cette distance donnée arbitrairement, et nous poserons

$$z = z' = h;$$

d'où, sensiblement,

$$x = x' = \frac{h}{k}.$$

De ces dernières relations on conclut que les points M et M′, projections des points M et M′ sur le plan XTY, peuvent être considérés comme situés sur une même parallèle à TY.

D'ailleurs, les plans tangents aux points M et M′

sont nécessairement parallèles. On a donc les deux équations de condition

$$2lx + my = 2l'x' + m'y',$$
$$mx + 2ny = m'x' + 2n'y',$$

lesquelles déterminent y et y' après qu'on y a remplacé x et x' par $\frac{h}{k}$.

6. *Calcul des paramètres* ρ *et* ρ'.

Les coordonnées x et y du point M, une fois obtenues, fournissent l'équation de la droite MC projection, sur le plan XTY, de la normale en M à la surface S. Cette équation fait connaître, à son tour, la position du point C où la projection coupe l'axe TX. On détermine, de même, la position du point C' où le prolongement de l'axe TX est rencontré par la projection M'C' de la normale en M' à la surface S'.

Si l'on représente ensuite par ρ et ρ' les longueurs TC et TC' (qui ne constituent pas nécessairement des rayons de courbure), et si l'on supprime des infiniment petits négligeables, on établit aisément les formules

$$\rho = \frac{-ky}{mx + 2ny}, \quad \rho' = \frac{+ky'}{m'x' + 2n'y'},$$

dans lesquelles les coordonnées x, y, x', y' doivent être remplacées par leurs valeurs obtenues précédemment; ce qui donne pour ρ et ρ', après toute simplification, des expressions indépendantes de l'infiniment petit h.

7. *Vitesses et accélérations simultanées.*

La droite MM′ étant perpendiculaire sur CC′, et les angles égaux TCM et TC′M′ étant infiniment petits, il en résulte que la somme MC + M′C′ ne diffère pas sensiblement de CC′. Si donc, par suite des translations élémentaires des surfaces S et S′, les points M et M′ viennent à se confondre, et les droites CM et M′C′ à se placer sur le prolongement l'une de l'autre, la distance mutuelle des points C et C′ restera la même. On établira donc, comme aux nos 2 et 3, les formules

$$v\cos\varphi - v'\cos\varphi' = 0, \tag{3}$$

$$\frac{dv}{dt}\sin\varphi - \frac{dv'}{dt}\sin\varphi' = \frac{(v\sin\varphi + v'\sin\varphi')^2}{\rho+\rho'}, \tag{4}$$

où φ et φ' sont les angles que forment les vitesses de translation v et v' avec la projection de la normale commune sur un plan parallèle à ces vitesses, où ρ et ρ' représentent des quantités définies et déterminées au n° 6.

Quant à l'arc élémentaire de glissement, égal à MM′ par définition, il est aussi représenté par MM′, et a, par conséquent, pour expression $CC'.d\varphi$. On en conclut aisément, comme au n° 4, la formule

$$u = v\sin\varphi + v'\sin\varphi'. \tag{5}$$

§ 2. — DE L'ACCÉLÉRATION TRANSMISE, DANS LE CAS DE DEUX MOUVEMENTS DE ROTATION S'EFFECTUANT AUTOUR D'AXES PARALLÈLES.

ARTICLE 1er. — Cas où les surfaces S et S' qui limitent les corps solides, sont des cylindres parallèles aux axes de rotation.

8. SECOND LEMME *relatif au déplacement infiniment petit d'une droite dans un plan.*

La droite CC′ (fig. 4) rencontre en P la droite XY située dans ce plan; au bout du temps *dt*, cette droite s'étant déplacée sans changer de longueur, le point C arrive en D, le point C′ en D′, et la rencontre P en Q; des points D, D′ et Q on abaisse sur CC′ les perpendiculaires DE, D′E′ et QR; on conserve d'ailleurs les notations du n° 1, et l'on représente par ψ l'angle de CC′ avec XY.

Les deux droites CC′ et DD′ se coupant au point I, les triangles semblables IDE, ID′E′ et IQR donnent

$$\frac{DE}{IE} = \frac{D'E'}{IE'} = \frac{QR}{IR},$$

ou, sensiblement,

$$\frac{DE}{IC} = \frac{D'E'}{IC'} = \frac{QR}{IP}.$$

On en déduit

$$\frac{QR - DE}{CP} = \frac{QR + D'E'}{C'P},$$

puis

$$QR = \frac{CP \cdot D'E' + C'P \cdot DE}{CC'},$$

ou, enfin,

$$(6) \quad PQ \cdot \sin\psi = \frac{CP \cdot v' \sin\varphi' + C'P \cdot v \sin\varphi}{CC'} dt.$$

Cette formule détermine le chemin élémentaire PQ que parcourt le point P sur XY.

9. *Vitesses angulaires simultanées* a *et* a'.

On suppose les axes de rotation perpendiculaires au plan de la figure 5, qu'ils percent aux points A et A'. Ce plan détermine les sections MG et M'G' dans les surfaces S et S' mobiles autour de ces axes avec les vitesses a et a'. Les sections MG et M'G', tangentes extérieurement l'une à l'autre au point T, ont les points C et C' pour centres des courbures qui répondent au point de contact. Au bout du temps dt, les lignes MG et M'G' se touchent par les points M et M', en sorte que les droites CM et M'C' sont placées sur le prolongement l'une de l'autre; et comme, d'ailleurs, on a sensiblement

$$CT = CM, \quad C'T = C'M',$$

il en résulte que la distance mutuelle des points C et C' est la même avant et après le déplacement élémentaire. La formule (1) du n° 1 est donc applicable ici.

Dans cette formule, les vitesses linéaires v et v' des points C et C' doivent être remplacées par les

produits $a.\,AC$ et $a'.A'C'$, et les angles φ et φ' par les compléments des angles ACP et A'C'P. La formule (1) devient alors

$$a.\,AC.\,\sin ACP - a'.\,A'C'.\,\sin A'C'P = o.$$

Mais, dans les triangles ACP et A'C'P, on a

$$AC.\,\sin ACP = AP.\,\sin APC,$$
$$A'C'.\,\sin A'C'P = A'P.\,\sin A'PC'.$$

La relation qui lie a et a' peut donc encore s'écrire

$$a.\,AP - a'.\,A'P = o,$$

ou, plus simplement,

$$pa - p'a' = o, \tag{7}$$

en représentant par p et p' les distances AP et A'P.

10. *Accélérations angulaires simultanées* $\frac{da}{dt}$ *et* $\frac{da'}{dt}$.

Dérivons par rapport au temps les deux membres de la formule (7); nous aurons

$$p\frac{da}{dt} - p'\frac{da'}{dt} = a'\frac{dp'}{dt} - a\frac{dp}{dt}.$$

Mais la somme $p+p'$ est constante, ce qui entraîne la condition

$$\frac{dp}{dt} + \frac{dp'}{dt} = o,$$

et ramène la relation précédente à la forme

$$p\frac{da}{dt} - p'\frac{da'}{dt} = (a+a')\frac{dp'}{dt} \tag{8}$$

Dans cette relation, dp' représente le déplacement élémentaire du point P sur AA′ (fig. 5), dans le sens A′A ; son expression est donc la même que celle obtenue pour PQ (fig. 4), par la formule (6). Si donc on pose

$$CT = \rho,\ C'T = \rho',\ TP = q,\ CPA = \psi;$$

si l'on change ensuite CP, C′P et CC′ en $q - \rho$, $q + \rho'$ et $\rho + \rho'$; $v \sin\varphi$ et $v' \sin\varphi'$ en $a.AC.\cos ACP$ et $a'.A'C'.\cos A'C'P$; enfin PQ en dp', cette formule (6) fournira la suivante

$$\frac{dp'}{dt}\sin\psi = \frac{a'(q-\rho)\,A'C'.\cos A'C'P + a(q+\rho')AC.\cos ACP}{\rho+\rho'},$$

dans laquelle on peut remplacer

$$AC.\cos ACP,\ A'C'.\cos A'C'P$$

par

$$CP - AP.\cos\psi,\ C'P + A'P.\cos\psi,$$

ou par

$$q - \rho - p\cos\psi,\ q + \rho' + p'\cos\psi ;$$

ce qui donne, après toute simplification et en ayant égard à la relation (7),

$$\frac{dp'}{dt}\sin\psi = -pa\cos\psi + \frac{(q-\rho)(q+\rho')}{\rho+\rho'}(a+a').$$

Ce résultat, substitué dans la formule (8), dont on multiplie préalablement par $\sin\psi$ les deux membres, conduit, après changement de $pa(a+a')$ en $(p+p')aa'$, à la formule définitive

$$(9)\quad \left(p\frac{da}{dt} - p'\frac{da'}{dt}\right)\sin\psi + (p+p')aa'\cos\psi = \frac{(q-\rho)(q+\rho')}{\rho+\rho'}(a+a')^2,$$

laquelle détermine $\frac{da}{dt}$ quand $\frac{da'}{dt}$ est donné, comme la formule (7) détermine a quand on donne a'.

11. *Vitesse de glissement* u.

Pour évaluer l'arc élémentaire de glissement MT + TM′ (fig. 6), il faut observer que les rotations adt et $a'dt$, effectuées autour des centres respectifs A et A′, font décrire au point P le même élément, en même temps qu'elles amènent les points M et M′ à des positions identiques ; elles ont donc pour effet d'appliquer les droites PM et PM′ l'une sur l'autre ; et, comme ces rotations sont de sens contraires, on en conclut que les droites PM et PM′, avant leur déplacement, forment entre elles un angle MPM′ égal à $adt + a'dt$: en sorte que, dans la figure MPM′, assimilée à un triangle de base infiniment petite MM′ et de hauteur TP, on a sensiblement

$$MM' = TP\,(a + a')\,dt.$$

Il en résulte la formule

$$u = q\,(a + a'). \tag{10}$$

Le second membre de la formule (9) s'exprimera donc aussi bien par le produit

$$\left(1 - \frac{\rho}{q}\right)\left(1 + \frac{\rho'}{q}\right)\frac{u^2}{\rho + \rho'}$$

ARTICLE 2.—Cas de surfaces S et S′ quelconques.

12. *Vitesses et accélérations angulaires simultanées.* On suppose le plan de la figure 7 mené par le

point T de contact des surfaces S et S′, et perpendiculaire aux axes de rotation, qui le percent aux points A et A′. Ce plan coupe le plan tangent commun suivant la droite TY; il reçoit la projection de la normale commune suivant la droite TX perpendiculaire à TY et rencontrant AA′ en P.

Les points M et M′ par lesquels S et S′ se touchent au bout du temps dt, après rotation autour des axes respectifs A et A′, sont à égale distance du plan de la figure; ils sont donc situés sur une parallèle à TY; il en est donc de même de leurs projections $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}'$ sur ce plan. Soient $\mathfrak{M}C$ et $\mathfrak{M}'C'$ les projections, sur le même plan, des normales à S et S′ menées par M et M′; soient C et C′ leurs points de rencontre avec TX; posons

$$TC=\rho,\quad TC'=\rho'.$$

Au bout du temps dt les points M et M′ se confondent, ainsi que leurs plans tangents; les points $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}'$ se confondent donc aussi, et les droites $C\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}'C'$ viennent se placer sur le prolongement l'une de l'autre, sans que, d'ailleurs, la distance des points C et C′ change d'une manière sensible; car on a sensiblement

$$C\mathfrak{M}+\mathfrak{M}'C'=CC',$$

$\mathfrak{M}\mathfrak{M}'$ étant perpendiculaire à CC′. On a donc, comme aux nos 9 et 10, les formules

$$pa-p'a'=o,$$

$$\left(p\frac{da}{dt}-p'\frac{da'}{dt}\right)\sin\psi+(p+p')aa'\cos\psi=\frac{(q-\rho)(q+\rho')}{\rho+\rho'}(a+a')^2,$$

où l'on représente par p et p' les segments que détermine sur AA′ la projection TX de la normale commune, par q le segment de TX compris entre le point T et la droite AA′, par ψ l'angle de TX avec AA′, par ρ et ρ' des longueurs que nous déterminerons plus loin.

13. *Vitesse de glissement.*

Par définition, l'arc élémentaire de glissement udt est égal à MM′, ou, si l'on veut, à MM′ (fig. 8). Or, on peut démontrer, comme au n° 11, qu'une rotation adt autour du point A amène la droite PM à la position à laquelle la droite PM′ est amenée par une rotation $a'dt$ autour du point A′; et, comme les deux rotations sont de sens contraires, on en conclut que l'angle MPM′ est égal à $(a+a')dt$, et MM′ à MP $(a+a')dt$, ou, sensiblement, à TP $(a+a')dt$, le point M étant infiniment près du point T. Il en résulte donc, comme au n° 11, la formule

$$u = q\,(a + a').$$

14. *Recherche des points* M *et* M′.

On rapporte les surfaces S et S′ à trois axes rectangulaires, dont les deux premiers sont les droites TX et TY de la figure 7. Leurs équations, réduites aux termes de l'ordre le moins élevé, sont

$$z = kx + lx^2 + mxy + ny^2$$

pour S, et

$$z' = kx' + l'x'^2 + m'x'y' + n'y'^2$$

pour S′.

Les points M et M′ étant situés à même distance du plan X T Y, satisfont à la condition

$$z = z' ; \tag{11}$$

d'où, sensiblement,

$$x = x' = \frac{z}{k}. \tag{12}$$

Les plans tangents en M et M′ aux surfaces S et S′, doivent devenir parallèles après que S a tourné de la quantité adt autour de l'axe A, et S′ de la quantité $a'dt$ autour de l'axe A′. On peut même, si l'on veut, imaginer que ces deux rotations s'effectuent autour de l'axe T Z ; c'est ce que nous allons supposer, en remarquant d'ailleurs qu'elles ont des sens contraires.

Avant la rotation, les coefficients angulaires du plan tangent en M à S sont

$$P = k + 2lx + my, \quad Q = mx + 2ny ;$$

ceux du plan tangent en M′ à S′ sont

$$P' = k + 2l'x' + m'y', \quad Q' = m'x' + 2n'y'.$$

On a sensiblement, après la rotation adt de S,

$$P = k + 2lx + my, \quad Q = mx + 2ny + kadt,$$

et, après la rotation $-a'dt$ de S′,

$$P' = k + 2l'x' + m'y', \quad Q' = m'x' + 2n'y' - ka'dt.$$

La condition de parallélisme des deux plans tangents est donc exprimée par les équations

$$\left\{ \begin{array}{l} 2lx + my = 2l'x' + m'y', \\ mx + 2ny = m'x' + 2n'y' - k(a + a')dt. \end{array} \right. \tag{13}$$

Dans la formule (10) enfin, u peut être remplacé par le rapport de $y - y'$ à dt : en sorte que l'on a

$$y - y' = q\,(a + a')\,dt. \tag{14}$$

Les relations (11), (12), (13) et (14) déterminent les coordonnées des points M et M′ ; ces coordonnées sont de l'ordre de dt, et ont par conséquent entre elles des rapports finis.

15. *Calcul des paramètres* ρ *et* ρ'.

Procédant ici comme au n° 6, on trouvera pour ρ et ρ' des expressions de même forme que celles déjà trouvées, et où il ne restera plus qu'à substituer à x, y, x', y' leurs valeurs déduites des formules du n° 14.

§ 3. — DE L'ACCÉLÉRATION TRANSMISE, DANS LE CAS DE DEUX SURFACES S ET S′ DONT L'UNE S TOURNE AUTOUR D'UN AXE, ET DONT L'AUTRE S′ SE MEUT SUIVANT UNE DIRECTION PERPENDICULAIRE A CET AXE.

ARTICLE 1er. — Les deux surfaces S et S′ sont des cylindres parallèles à l'axe.

16. *Vitesses simultanées* a *et* v′.

Le plan de la figure 9 est supposé perpendiculaire à l'axe ; il le rencontre au point A, et coupe les surfaces S et S′ suivant les lignes MG et M′G′, qui se touchent au point T. La ligne MG est mobile autour du point A avec la vitesse angulaire a, et la ligne M′G′ mobile suivant une direction perpendiculaire à la droite AB, avec la vitesse linéaire v'. La droite

CC′ qui joint les centres de courbure répondant au point T, rencontre en P la droite AB, à la distance p du point A, à la distance q du point T, et forme avec BA l'angle ψ. Les droites CM et C′M′, aboutissant aux points M et M′ par lesquels les lignes MG et M′G′ se touchent au bout du temps dt, sont sensiblement égales aux droites CT et C′T, c'est-à-dire aux rayons de courbure ρ et ρ' : en sorte que la distance des points C et C′ peut être considérée comme n'ayant pas varié pendant le temps dt. On a donc, en vertu de la formule (1), où l'on remplace v par $a.AC$, φ par $\frac{\pi}{2} - ACP$, et φ' par $\frac{\pi}{2} - \psi$, la relation

$$a.AC.\sin ACP - v'\sin\psi = o.$$

Mais, dans le triangle APC, le produit AC. sin ACP est égal à $p\sin\psi$. La condition précédente devient donc, après simplification,

$$pa - v' = o. \tag{15}$$

17. *Accélérations angulaires simultanées* $\frac{da}{dt}$ et $\frac{dv'}{dt}$.

Si l'on dérive par rapport au temps la formule (15), on obtient la relation

$$p\frac{da}{dt} - \frac{dv'}{dt} = -a\frac{dp}{dt}, \tag{16}$$

dont il faut transformer le second membre. On a, pour cela, recours à la formule (6), où l'on change PQ en $-dp$, CP en $q-\rho$, C′P en $q+\rho'$, CC′ en $\rho+\rho'$, comme au n° 16, puis v' en pa, sin φ' en cos ψ, v sin φ en $a.AC.\cos ACP$, c'est-à-dire en $a(q-\rho$

$-p\cos\psi$). Il vient alors, après division par dt et simplification,

$$-\frac{dp}{dt}\sin\psi = -pa\cos\psi + \frac{(q-\rho)(q+\rho')}{\rho+\rho'}a;$$

ce qui ramène la relation (16) à la forme

$$(17)\quad \left(p\frac{da}{dt}-\frac{dv'}{dt}\right)\sin\psi + pa^2\cos\psi = \frac{(q-\rho).(q+\rho')}{\rho+\rho'}a^2,$$

et permet de déterminer l'une des accélérations $\frac{da}{dt}$ ou $\frac{dv'}{dt}$, quand l'autre est connue.

18. *Vitesse de glissement* u.

Que l'on fasse tourner le point P (fig. 10) de la quantité adt autour du point A, ou qu'on lui fasse subir un déplacement rectiligne $v'dt$ perpendiculaire à la direction AB, ce point P décrit le même élément. D'une autre part, la rotation adt imprimée au point M et la translation $v'dt$ imprimée au point M′ déterminent la coïncidence de ces deux points. Il en faut conclure que la droite PM, après avoir subi la rotation adt, et la droite PM′, après avoir subi la translation $v'dt$, viennent se confondre. L'angle MPM′ de leurs positions primitives est donc égal à adt; et, si l'on assimile la figure MPM′ à un triangle dont TP serait une hauteur, on a sensiblement

$$MM' = TP.\ adt;$$

ce qui entraîne la formule

$$(18)\qquad u = qa.$$

ARTICLE 2. — Les surfaces S et S′ sont quelconques.

19. *Vitesses et accélérations.*

On suppose que le plan de la figure 11 renferme le point T de contact des deux surfaces, et est, comme précédemment, perpendiculaire à l'axe de rotation. La normale commune se projette sur ce plan suivant la droite TX, qui rencontre en P la droite AB définie au n° 16 ; les points $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}'$, situés sur une même perpendiculaire à TX, sont les projections des points M et M′ par lesquels se touchent les surfaces S et S′ au bout du temps dt ; $\mathfrak{M}C$ et $\mathfrak{M}'C'$ sont les projections des normales menées à S et S′ par les points M et M′ ; ces projections rencontrent TX en les points C et C′ situés à des distances ρ et ρ' du point T déterminées plus loin. La trace du plan tangent commun sur le plan de la figure est TY.

Quand, au bout du temps dt, les points $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}'$ se confondent, la distance des points C et C′ est sensiblement la même qu'avant le déplacement ; on établit donc, comme plus haut, les formules (15) et (17), dans lesquelles les mêmes lettres conservent la même signification, qu'il s'agisse de la figure 11 ou de la figure 9. De même, on justifie la formule (18), en démontrant que $\mathfrak{M}\mathfrak{M}'$ (fig. 12), ou udt, est égal à $\mathfrak{M}P.adt$, et en substituant à $\mathfrak{M}P$ la longueur q, qui n'en diffère pas sensiblement.

20. *Calcul des paramètres ρ et ρ'.*

Revenons à la figure 11, et concevons que les surfaces S et S′ soient rapportées à trois axes rectan-

gulaires d'origine T, dont le dernier seul TZ n'est pas figuré. Dans le voisinage du point T, les équations de ces surfaces peuvent s'écrire :

$$z = kx + lx^2 + mxy + ny^2,$$
$$z' = kx' + l'x'^2 + m'x'y' + n'y'^2.$$

Pour les points M et M', on établit d'abord aisément les relations

$$(19) \qquad z = z', \; x = x' = \frac{z}{k}, \; y - y' = q\,a\,dt,$$

dont la dernière équivaut à la formule (18), parce que $y - y'$ est égal à udt.

Il reste à exprimer que les plans tangents aux points M et M' des surfaces S et S', deviennent parallèles quand on fait tourner S de la quantité adt autour de TZ. Or, c'est ce qu'on exprime en posant les égalités :

$$(20) \quad \begin{cases} 2l'x' + m'y' = 2lx + my, \\ m'x' + 2n'y' = mx + 2ny + k\,a\,dt. \end{cases}$$

Les relations (19) et (20) déterminent les coordonnées des points M et M' ; et les valeurs de ces coordonnées, substituées dans les formules du n° 6, font connaître les paramètres ρ et ρ'.

Caen, typ. F. Le Blanc-Hardel.

De

Fi

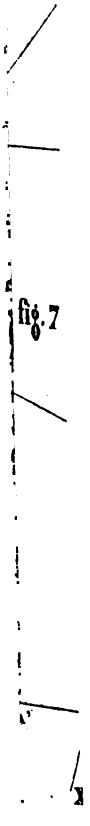


fig. 7

)e

Fi

fig. 7

fig. 7

653

CINÉMATIQUE

PREMIERS PRINCIPES

DE LA THÉORIE GÉOMÉTRIQUE

DES EXCENTRIQUES ET DES ENGRENAGES

PAR

M. Ch. GIRAULT

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE CAEN

LBII

CAEN

IMPRIMERIE DE F. LE BLANC-HARDEL, LIBRAIRE

RUE FROIDE, 9 ET 4

1869

2653

CINÉMATIQUE

PREMIERS PRINCIPES

DE LA THÉORIE GÉOMÉTRIQUE

DES EXCENTRIQUES ET DES ENGRENAGES

PAR

M. Ch. GIRAULT

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE CAEN

CAEN

IMPRIMERIE DE F. LE BLANC-HARDEL, LIBRAIRE

RUE FROIDE, 3 ET 4

1869

Extrait des Mémoires de l'Académie impériale des Sciences, Arts et Belles-Lettres de Caen.

CINÉMATIQUE.

PREMIERS PRINCIPES

DE LA THÉORIE GÉOMÉTRIQUE

DES EXCENTRIQUES ET DES ENGRENAGES.

1. Dans un travail précédent (1), nous avons étudié la transmission du mouvement d'un corps solide à un autre par contact immédiat, lorsque l'un de ces corps est animé d'un mouvement de rotation autour d'un axe, et l'autre d'un mouvement de translation rectiligne perpendiculaire ou parallèle à cet axe, ou lorsque tous deux sont animés de mouvements de rotation autour d'axes parallèles ou concourants. Nous avons été par là conduits à établir plusieurs théorèmes, qui ne sont eux-mêmes que des cas particuliers de deux théorèmes plus généraux dont nous allons donner ici la démonstration, en nous appuyant,

(1) *Mémoires de l'Académie des Sciences, Arts et Belles-Lettres de Caen*, 1863 : Théorèmes généraux relatifs à la transmission du mouvement par contact immédiat.

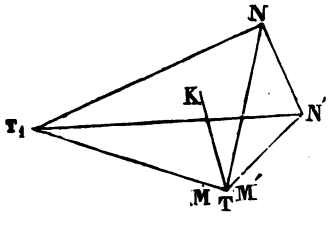
comme dans notre premier travail, sur la proposition suivante :

Théorème fondamental. — *Si deux corps solides, terminés par des surfaces continues* S *et* S′, *se meuvent l'un contre l'autre, les vitesses des points* M *et* M′ *par lesquels ils se touchent, ont, à chaque instant, même projection sur la normale commune.*

Commençons par donner, de ce théorème important, une démonstration nouvelle, dans laquelle nous éviterons de faire figurer des infiniment petits de différents ordres.

Les deux surfaces S et S′ se touchant d'abord au point T (fig. 1), avec lequel coïncident le point M de

Fig. 1.



S et le point M′ de S′, on imagine que ces deux surfaces, s'étant déplacées infiniment peu, arrivent à se toucher en un autre point T_1 de l'espace et par d'autres points. Le point M alors passe à la position N et le point M′ à la position N′; les points T_1, N et N′ sont infiniment voisins du point T, et, par conséquent, infiniment voisins deux à deux; les droites T_1N et T_1N' représentent donc des éléments respectifs des surfaces S et S′ déplacées; ces éléments

sont, par conséquent, situés tous deux dans le plan tangent commun en T_1 aux deux surfaces, et ils le déterminent. De la continuité il résulte d'ailleurs que ce plan est sensiblement parallèle au plan qui touche en T les deux surfaces avant qu'elles aient subi leur déplacement élémentaire.

Cela posé, si l'on abaisse du point T sur le plan NT_1N' la perpendiculaire TK terminée à ce plan, on aperçoit que cette droite TK est sensiblement perpendiculaire au plan tangent commun qui répond au point T; c'est donc, en ce point, la normale commune. Or, la longueur de la droite TK représente à la fois la projection de MN et celle de $M'N'$ sur sa propre direction; ainsi, les deux chemins élémentaires simultanés MN et $M'N'$ ont même projection sur la normale commune; il en est donc de même des vitesses simultanées des points M et M', puisque ces vitesses sont proportionnelles aux chemins et dirigées suivant ces chemins. Le théorème est donc justifié.

2. **Lemme.**—*Lorsqu'un point* M *tourne autour d'un axe fixe avec la vitesse angulaire* a, *si l'on mène par ce point une droite* MN *formant avec l'axe un angle* α *et dont la plus courte distance à l'axe soit égale à* d, *la projection, sur cette droite* MN, *de la vitesse linéaire du point* M *a pour expression* $a.d.\sin\alpha$.

Pour le démontrer, supposons le point M (fig. 2) situé dans le plan du tableau, l'axe de rotation perpendiculaire à ce plan, qu'il perce au point A, et la droite MN s'y projetant suivant MZ. On la fait tourner autour de MZ et on la rabat dans le plan,

suivant une droite MN′ qui forme avec MZ un angle égal au complément de l'angle α supposé aigu. Soit

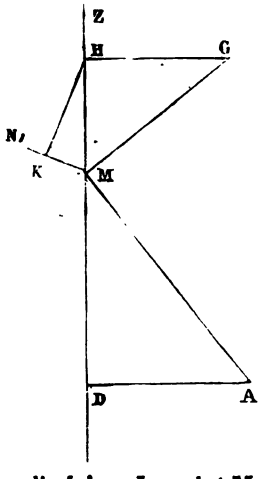


Fig. 2.

MG la vitesse linéaire du point M, située dans le plan et perpendiculaire à la droite AM; soit MH la projection de MG sur MZ, MK celle MH sur MN′. La projection de MG sur MN est rabattue suivant MK; elle a donc pour expression MH. sin α.

Que l'on abaisse, maintenant, du point A sur MZ la perpendiculaire AD, laquelle est précisément égale à d; les deux triangles AMD et MGH, qui sont semblables comme ayant les côtés respectivement perpendiculaires, donnent la relation

$$\frac{MH}{AD} = \frac{MG}{AM},$$

où le second membre n'est autre que la vitesse angulaire a, et d'où l'on tire l'égalité

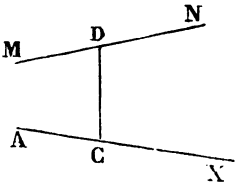
$$MH = ad.$$

On en conclut que la vitesse linéaire du point M a pour expression de sa projection sur MN le produit $ad \sin \alpha$: ce qui est conforme à l'énoncé.

3. **Autre démonstration.**—On établit le lemme d'une manière plus simple, en s'appuyant sur cette remarque que, si la distance de deux points mobiles demeure invariable, les vitesses de ces deux points ont, sur la droite qui les joint, des projections égales (1).

Ceci admis, soit AX (fig. 3) l'axe de rotation, et

Fig. 3.



CD sa plus courte distance à la droite MN. Imaginons que les deux points M et D tournent solidairement autour de AX. Leur distance mutuelle demeurant invariable, les vitesses linéaires de ces deux points M et D ont, sur la droite MN, des projections égales; or, la vitesse linéaire du point D est égale à ad et forme avec MN un angle égal au complément de α; sa projection sur MN est donc égale à $ad \sin \alpha$; telle est donc aussi la projection de la vitesse linéaire du point M.

(1) Voir, dans nos *Éléments de géométrie appliquée à la transformation du mouvement dans les machines*, p. 192 et suivantes, la démonstration relative au déplacement arbitraire de la bielle réduite à une simple ligne droite.

TRANSFORMATION D'UN MOUVEMENT RECTILIGNE DANS UN MOUVEMENT CIRCULAIRE, ET TRANSFORMATION RÉCIPROQUE.

4. De deux corps solides toujours en contact, on suppose que l'un se meut avec la vitesse angulaire a autour d'un axe fixe, et l'autre avec la vitesse linéaire v parallèlement à une direction donnée ; M étant le point de contact à un instant quelconque et MN la normale commune, cette normale forme avec l'axe de rotation l'angle α, et avec la direction de la translation l'angle β ; à cet instant, deux points, appartenant respectivement à chacun des deux corps solides, occupent simultanément la position M ; l'un tourne autour de l'axe fixe avec la vitesse angulaire a, en sorte que la projection sur MN de sa vitesse linéaire est égale à $ad \sin \alpha$, d'après le lemme précédent ; l'autre se meut avec la vitesse linéaire v, dont la projection sur MN est égale à $v \cos \beta$. On a donc, en vertu du théorème fondamental, l'égalité

$$v \cos \beta = ad \sin \alpha,$$

d'où l'on peut tirer le rapport $\frac{v}{a}$ des vitesses, ce qui conduit au théorème suivant :

Premier théorème. — *Si, de deux corps solides toujours en contact, l'un tourne autour d'un axe fixe avec la vitesse angulaire* a, *tandis que l'autre se meut avec une vitesse linéaire* v *constamment parallèle à une*

direction donnée, on a, pour toute position du système, la formule

$$\frac{v}{a} = \frac{d \sin \alpha}{\cos \beta},$$

où d *est la plus courte distance de l'axe à la normale commune, α l'angle que forme cette normale avec l'axe, et β l'angle qu'elle forme avec la direction de la translation.*

5. **Autre forme du premier théorème.**—*Si l'on mène, parallèlement à la direction de la translation, la droite* AS *sécante à l'axe* AX *de rotation et à la normale commune* SN ; *si l'on détermine le point* P *de cette normale, qui se projette en* A *sur* SA ; *on a, pour toute position du système, la formule*

$$\frac{v}{a} = p \sin i,$$

dans laquelle i *représente l'angle constant* SAX, *et* p *la distance variable du point* P *au plan de cet angle.*

Que l'on mène, en effet, par le point S (fig. 4),

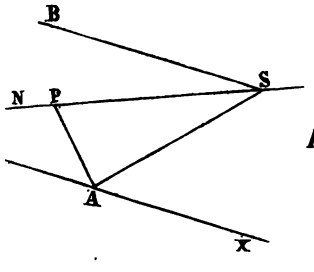


Fig. 4.

une droite S B parallèle à AX et de sens contraire ;

que l'on considère le trièdre de sommet S et d'arêtes SA, SB, SP; la distance du point A à la face BSP est égale à d; la distance du point P à la face BSA est égale à p; les longueurs d et p sont donc directement proportionnelles aux distances des points A et P à l'arête SB, et l'on a

$$\frac{d}{p} = \frac{SA.\sin BSA}{SP.\sin BSP} = \cos\beta\,\frac{\sin i}{\sin\alpha}.$$

Cette relation, écrite sous la forme

$$\frac{d\sin\alpha}{\cos\beta} = p\sin i,$$

et rapprochée de celle du n° 4, fournit la relation

$$\frac{v}{a} = p\sin i,$$

qu'il s'agissait d'établir.

Remarque. — Si l'on construit un trièdre ayant pour faces les angles α, β et i; si, sur l'arête opposée à la première face α, on détermine le point situé à la distance d de cette face, et que par ce point, dans la face β, on élève à cette arête une perpendiculaire prolongée jusqu'à la rencontre de l'autre arête; si l'on détermine, enfin, la distance p du point de rencontre à la face i: on obtient encore la formule $\frac{v}{a} = p\sin i$. Cela résulte, en effet, de ce que le trièdre est égal au trièdre de sommet S (fig. 4), ou lui est symétrique.

6. **Cas d'une translation parallèle à l'axe.** — Il vient alors $\alpha = \beta$, et la formule du n° 4 se change dans la suivante :

$$\frac{v}{a} = d \operatorname{tg} \alpha.$$

Dans le cas d'une vis et d'un écrou tous deux mobiles l'un contre l'autre, le produit $d \operatorname{tg} \alpha$ prend la même valeur en chaque point de contact.

7. **Cas d'une translation perpendiculaire à l'axe.** — Ici l'on a $i = \frac{\pi}{2}$, et la formule du n° 5 devient

$$\frac{v}{a} = p,$$

où l'on peut définir p en disant que c'est la distance de l'axe au point de rencontre de la normale commune avec le plan mené suivant l'axe perpendiculairement à la direction de la translation.

Dans le cas de l'engrenage d'une roue et d'une crémaillère, cette longueur p conserve à chaque instant la même valeur.

TRANSFORMATION D'UN MOUVEMENT CIRCULAIRE DANS UN MOUVEMENT CIRCULAIRE.

8. **Second théorème.**—*Si deux corps solides toujours en contact se meuvent respectivement autour de deux axes fixes quelconques, leurs vitesses angulaires sont inversement proportionnelles aux plus courtes dis-*

tances de chacun des axes à la normale commune, et aux sinus des angles qu'ils forment avec elle.

Soient, en effet, M et M′ les points par lesquels se touchent ces deux corps solides, a et a' les vitesses angulaires de rotation, α et α' les angles formés par les axes avec la normale commune, d et d' les plus courtes distances. Du lemme établi précédemment, il résulte que $ad\sin\alpha$ représente la projection de la vitesse linéaire du point M sur la normale commune, et $a'd'\sin\alpha'$ la projection de la vitesse linéaire du point M′ sur la même normale. On a donc, en vertu du théorème fondamental, la relation

$$a'd'\sin\alpha' = a\,d\,\sin\alpha,$$

d'où l'on tire la formule

$$\frac{a'}{a} = \frac{d\sin\alpha}{d'\sin\alpha'};$$

ce qui justifie le théorème.

9. On peut, avantageusement, donner une autre expression du rapport des vitesses. M (fig. 5) étant le point de contact des deux corps solides et MN la normale commune, projetons les deux axes AX et A′X′ sur le plan tangent commun ; soit B le point de rencontre des deux projections BX et BX′, lequel est lui-même la projection des points A et A′, si l'on choisit convenablement ces points sur les axes. Les angles BAX et BA′X′ sont respectivement égaux à α et α'; les perpendiculaires MQ et MQ′ abaissées du point M sur BX et BX′ sont respectivement égales à d et d'. Menons la droite BM, abaissons des points X et X′ sur BM les perpendiculaires XY et X′Y′, menons les droites AY et

A′ Y′; les angles X A Y et X′ A′ Y′, que nous appellerons

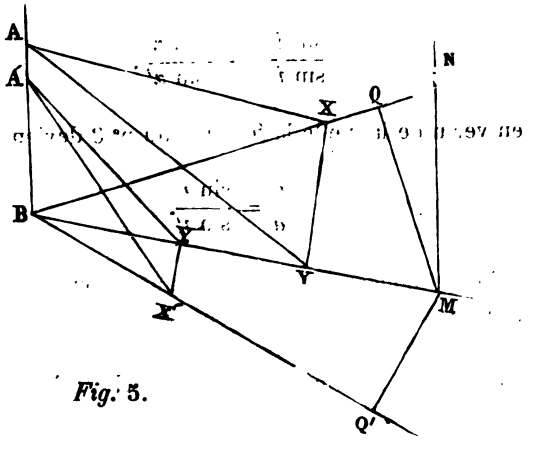


Fig. 5.

i et i', mesurent les inclinaisons des axes A X et A′ X′ sur le plan B M N, que nous nommerons le plan P.

La considération des triangles rectangles B M Q et B M Q′ fournit la relation

$$\frac{d}{d'} = \frac{\sin \mathrm{MBQ}}{\sin \mathrm{MBQ'}}.$$

D'une autre part, le trièdre $\left(\mathrm{A}\middle|\begin{matrix}\mathrm{B}\\ \mathrm{X}\\ \mathrm{Y}\end{matrix}\right)$, dont les deux faces B A Y et X A Y sont perpendiculaires entre elles et dont le dièdre d'arête A B est mesuré par l'angle M B Q, donne la relation

$$\sin i = \sin \mathrm{MBQ}.\ \sin \alpha;$$

de même le trièdre $\left(\mathrm{A'}\middle|\begin{matrix}\mathrm{B}\\ \mathrm{X'}\\ \mathrm{Y'}\end{matrix}\right)$ donne la relation

$$\sin i' = \sin \mathrm{MBQ'}.\ \sin \alpha',$$

Ces deux relations divisées membre à membre et rapprochées de la précédente, fournissent l'égalité

$$\frac{\sin i}{\sin i'} = \frac{d \sin \alpha}{d' \sin \alpha'},$$

en vertu de laquelle la formule du n° 8 devient

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\sin i}{\sin i'}.$$

Pour énoncer ce dernier résultat, on remarquera que le plan P est le plan normal commun dont la rencontre avec les axes détermine une corde A A' parallèle à la normale commune MN, et l'on dira :

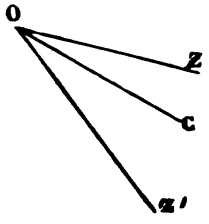
Autre forme du second théorème.—*Si deux corps solides toujours en contact se meuvent respectivement autour de deux axes fixes quelconques, leurs vitesses angulaires sont inversement proportionnelles aux sinus des angles que ces axes forment avec le plan normal commun* P *dont la rencontre avec eux détermine une corde parallèle à la normale commune.*

10. **Corollaire.**— *Pour que le rapport des vitesses angulaires demeure constant, il est nécessaire et suffisant que le plan* P *reste toujours parallèle à une même droite quelconque perpendiculaire à la plus courte distance des deux axes de rotation.*

En effet, par un point fixe O (fig. 6) pris où l'on voudra, menons les droites O Z et O Z' respectivement parallèles aux axes A X et A' X' déjà considérés, puis un plan parallèle au plan P et coupant le plan Z O Z'

suivant une droite OC. Soient γ et γ' les angles

Fig. 6.



formés par cette droite OC avec OZ et OZ'. On démontre aisément que l'on a

$$\frac{\sin\gamma}{\sin\gamma'}=\frac{\sin i}{\sin i'},$$

et l'on en déduit la formule

$$\frac{a'}{a}=\frac{\sin\gamma}{\sin\gamma'},$$

d'où l'on conclut que le rapport $\frac{a'}{a}$ conserve une valeur constante si, pour toutes les positions du système, la droite OC reste la même. Réciproquement, si le rapport $\frac{a'}{a}$ conserve une valeur constante, la droite OC doit rester la même. Or, le plan P est constamment parallèle à la droite OC, et cette droite OC, quelque position qu'elle occupe dans le plan ZOZ', est perpendiculaire à la plus courte distance des deux axes. Ainsi, le corollaire se trouve démontré.

11. **Autre forme du corollaire.**—*Pour que le*

rapport des vitesses angulaires demeure constant, il est nécessaire et suffisant que la trace du plan P *sur un plan parallèle aux deux axes de rotation reste toujours parallèle à elle-même.*

Nous pouvons, sans inconvénient, nous dispenser de toute démonstration sur ce point.

12. **Axes perpendiculaires entre eux.** — Dans ce cas, les angles γ et γ' sont complémentaires, et la formule du n° 10 devient

$$\frac{a'}{a} = tg\,\gamma.$$

L'engrenage de la vis sans fin avec une roue dentée rentre dans le cas qui nous occupe. L'angle γ est alors constant.

13. **Axes concourants.** — Le plan P défini plus haut passe alors par le point O de concours des axes OX et OX′ (fig. 7), et sa trace ON sur le plan

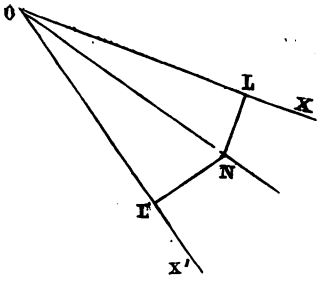


Fig. 7.

XOX′ renferme la trace N, sur ce plan, de la normale commune. Que l'on abaisse du point N sur les droites

OX et OX′, les perpendiculaires NL et NL′ de longueurs l et l', et l'on aura

$$\frac{\sin i}{\sin i'} = \frac{\sin \mathrm{NOX}}{\sin \mathrm{NOX}'} = \frac{l}{l'};$$

en sorte que la dernière formule du n° 9 deviendra

$$\frac{a'}{a} = \frac{l}{l'}.$$

Dans le cas de l'engrenage conique, le rapport $\frac{l}{l'}$ doit demeurer constant, c'est-à-dire que la trace N de la normale commune ne peut se déplacer que sur une droite fixe issue du point O.

14. Axes parallèles.—On déduit ce cas du précédent en transportant le point O à l'infini. Alors, dans la formule

$$\frac{a'}{a} = \frac{l}{l'},$$

l et l' représentent les deux segments que détermine le point N (fig. 8) sur une perpendiculaire LL′ commune à ces axes et limitée à ces axes.

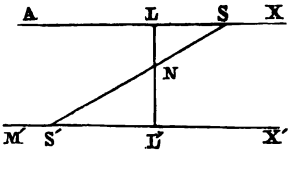


Fig. 8.

Plus généralement, on peut écrire

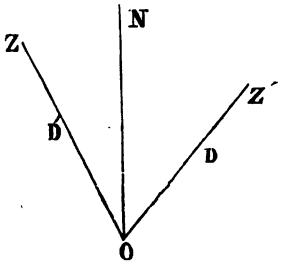
$$\frac{a'}{a} = \frac{s}{s'},$$

en appelant s et s' les deux segments NS et NS′ d'une sécante quelconque aux deux axes, menée par le point N et terminée à ces axes.

Dans le cas de l'engrenage cylindrique, le rapport $\frac{s}{s'}$ doit être constant, ce qui exige que la trace N de la normale commune reste toujours située sur une même droite parallèle aux axes.

15. **Troisième forme du second théorème.** —*Les circonstances du mouvement étant celles du* n° 8, *et les notations demeurant les mêmes, on construit un trièdre de sommet* O (fig. 9), *dont les arêtes* OZ, OZ′ *et* ON

Fig. 9.



sont respectivement parallèles aux deux axes de rotation et à la normale commune; on prend sur l'arête OZ′ *le point* D *situé à la distance* d *de la face* NOZ, *et sur l'arête* OZ *le point* D′ *situé à la distance* d′ *de la face* NOZ′. *Cela posé, on a, pour déterminer le rapport des*

vitesses de rotation a *et* a' *autour des axes de directions respectives* OZ *et* OZ', *la formule*

$$\frac{a'}{a} = \frac{OD}{OD'}$$

En effet, dans ce trièdre, les distances d et d' des points D et D' aux faces NOZ et NOZ' sont entre elles comme les distances des points D et D' à l'arête ON, et ces dernières sont égales respectivement à OD. sin α' et OD'. sin α ; on a donc la relation

$$\frac{d}{d'} = \frac{OD.\ \sin \alpha'}{OD'.\ \sin \alpha},$$

qui peut s'écrire

$$\frac{d\ \sin \alpha}{d'\ \sin \alpha'} = \frac{OD}{OD'},$$

et qui donne, après rapprochement de la formule du n° 8, celle qu'il s'agissait d'établir.

Caen. — Typ. Le Blanc-Hardel.

652

CINÉMATIQUE.

THÉORÈMES GÉNÉRAUX

RELATIFS A LA TRANSMISSION DU MOUVEMENT

AU MOYEN DE CORDAGES;

PAR

M. CH. GIRAULT,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE CAEN.

CAEN,

CHEZ A. HARDEL, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE,

RUE FROIDE, 2.

1863.

52

Alexandre Ziwet

CINÉMATIQUE.

THÉORÈMES GÉNÉRAUX

RELATIFS A LA TRANSMISSION DU MOUVEMENT

AU MOYEN DE CORDAGES;

PAR

M. CH. GIRAULT,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE CAEN.

CAEN,

CHEZ A. HARDEL, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE,

RUE FROIDE, 2.

—

1863.

Extrait des Mémoires de l'Académie des Sciences Arts et Belles-Lettres de Caen.

CINÉMATIQUE.

THÉORÈMES GÉNÉRAUX

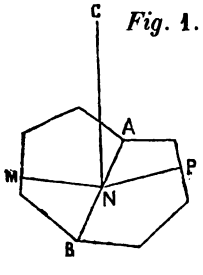
RELATIFS A LA TRANSMISSION DU MOUVEMENT AU MOYEN DE CORDAGES.

PRÉLIMINAIRES.

1. Si un cordon flexible et inextensible est tendu sur une surface courbe contre laquelle les frottements sont nuls, il y affecte la figure d'une ligne en tous les points de laquelle la normale principale est normale à la surface.

Pour s'en convaincre, il suffit de considérer la surface comme étant polyédrale. Soient AMB et APB (fig. 1)

Fig. 1.



deux faces élémentaires consécutives sur lesquelles s'appliquent les deux éléments consécutifs MN et NP du cordon. Les tensions de MN et de NP doivent être

égales, puisque les frottements sont nuls. La résultante de ces deux tensions doit donc être dirigée suivant la bissectrice NC de l'angle MNP; et, pour que cette résultante maintienne le point N du cordon en équilibre sur l'arête AB d'intersection des deux faces AMB et APB, il faut que la bissectrice NC soit perpendiculaire à AB. Ainsi, l'angle ANC est droit, l'angle MNC est infiniment peu différent d'un droit, et par suite la droite NC est perpendiculaire au plan MNA; d'où l'on voit que la droite NC est à la fois normale à l'élément superficiel AMB, et normale principale de la ligne MNP. Le fil embrasse donc sur la surface une ligne géodésique, et, s'il la quitte en formant deux brins rectilignes, ces brins se confondent avec les tangentes extrêmes de la ligne géodésique.

2. Ce point établi, nous allons étudier la transmission du mouvement lorsqu'elle se réalise au moyen d'un cordon qui relie deux corps solides à surfaces parfaitement polies, embrasse sur chacun d'eux une ou plusieurs lignes géodésiques, et va une ou plusieurs fois de l'un à l'autre suivant la direction d'une tangente commune à deux arcs géodésiques des deux surfaces. Les liaisons seront supposées complètes pour chacun des deux corps solides, et le cordon sera sans fin, ou fixé par chacune de ses extrémités à l'un ou à l'autre des deux corps; ou bien l'une des deux extrémités sera libre, et le brin qui s'y termine glissera contre l'un des corps supposé fixe.

Dans tous les cas, d'ailleurs, nous admettrons que les deux surfaces offrent au cordon des liaisons stables, c'est-à-dire des liaisons que ne peuvent détruire de très-petits dérangements de système : en sorte

qu'à un mouvement continu de ce système correspondra un déplacement continu, sur chacune des surfaces, des lignes géodésiques embrassées par le cordon.

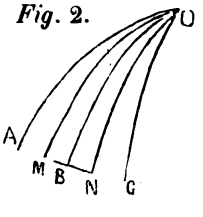
§ 1er. — PROPRIÉTÉS RELATIVES AUX LIGNES GÉODÉSIQUES D'UNE SURFACE.

8. THÉORÈME. — *Si l'on trace sur une surface une infinité de lignes géodésiques issues d'un point donné, et si l'on prend sur ces lignes, à partir de ce point, des arcs de même longueur, le lieu géométrique de leurs extrémités coupe à angle droit toutes les lignes géodésiques.*

La propriété se justifie aisément si la surface est développable. En effet, après développement, les lignes géodésiques se transforment en des droites partant du point donné; le lieu géométrique, en une circonférence dont ce point est le centre, et que, pour cela, les droites rencontrent orthogonalement. Or, le développement, on le sait, n'altère pas la grandeur des angles sous lesquels se coupent les lignes situées sur la surface.

Considérons maintenant le cas d'une surface s quelconque. Soit o (fig. 2) le point donné sur s;

Fig. 2.



soient OA, OB, OC, .. des arcs géodésiques de s, infini-

ment voisins deux à deux, et de même longueur l. Imaginons que l'on construise la surface s_a enveloppe des plans tangents à s le long de OA ; et de même, les surfaces s_b, s_c, .. enveloppes des plans tangents à s le long de OB, OC, ... Les surfaces consécutives s_a, s_b, s_c, .. se coupent deux à deux suivant des lignes OM, ON, .. qu'on peut regarder comme les arêtes d'une surface mixte enveloppe des surfaces s_a, s_b, s_c, .., et dont, par exemple, MON est la face située sur s_b. Cette surface mixte diffère infiniment peu de la surface s; elle a pour lignes géodésiques les arcs OA, OB, OC, .., puisqu'elle a mêmes normales que s le long de ces arcs; si on la substitue à la surface s, on sera conduit à substituer au lieu géométrique des points A, B, C, .. le lieu géométrique d'éléments tels que l'élément MN qui s'obtient en fixant au point o l'extrémité d'un fil de longueur l, tendant ce fil sur la surface s_b, et faisant mouvoir contre s_b son autre extrémité, entre les arêtes OM et ON. Or, cet élément passe au point B; il coupe à angle droit l'arc OB, puisque la surface s_b est développable ; le lieu géométrique des éléments MN, et par conséquent le lieu géométrique des points A, B, C, .., coupe donc à angle droit les lignes géodésiques issues du point o sur la surface s.

4. *Nota :* Deux éléments MN consécutifs n'ont pas nécessairement une extrémité commune ; mais on est sûr que ces deux éléments, considérés comme infiniment petits du premier ordre, rencontrent une même arête en des points distants l'un de l'autre d'un infiniment petit au moins du second ordre. Cela résulte de ce que chaque élément MN détermine, sur

les arêtes qui lui correspondent, des arcs OM et ON qui diffèrent de l d'un infiniment petit au moins du second ordre : comme on peut le voir en développant la face s_b et comparant à leurs cordes les arcs OM et ON transformés. Le lieu des éléments MN constitue donc une seule et même ligne continue.

5. THÉORÈME. — *La différence de longueur de deux arcs géodésiques* OM *et* OM′ (fig. 3) *issus d'un même point*

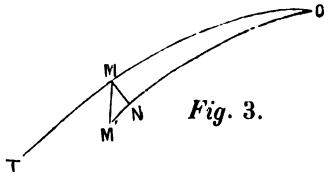


Fig. 3.

O, *et dont les extrémités* M *et* M′ *sont infiniment voisines, est égale à la projection de la distance* MM′ *sur l'une des tangentes extrêmes.*

Pour le prouver, du point O comme pole, décrivons sur la surface, avec un fil tendu de longueur égale à OM, un arc MN qui rencontre en N l'arc OM′. Nous aurons ON=OM, et par suite OM′—OM=M′N. Menons la droite MM′. Il résulte du théorème du n°. 3, que le triangle élémentaire MNM′ est rectangle en N : en sorte qu'on a

$$M'N = MM' \cdot \cos MM'N.$$

Or, si MT est la tangente à l'arc OM au point M, cette égalité peut s'écrire encore

$$OM' - OM = MM' \cdot \cos M'MT,$$

et donne, quel que soit le plus grand des deux arcs OM et OM′, l'expression de leur différence OM′—OM.

6. THÉORÈME. — *La différence de longueur de deux arcs géodésiques qui ont leurs extrémités infiniment voisines deux à deux, est égale à la somme algébrique des projections sur les tangentes extrêmes d'un même arc, des droites élémentaires qui joignent ces extrémités deux à deux.*

Soient, en effet, MN et M′N′ (fig. 4) les deux arcs

Fig. 4.

considérés, MT et NU les tangentes extrêmes du premier ; menons l'arc géodésique M′N, et soit NV sa tangente au point N, laquelle forme un angle infiniment petit avec la tangente NU. D'après ce qui a été vu au numéro précédent, on a : d'une part,

$$M'N - MN = MM' \cdot \cos M'MT;$$

de l'autre,

$$M'N' - M'N = NN' \cdot \cos N'NV.$$

Ajoutant ces deux égalités, et substituant à l'angle N′NV l'angle N′NU qui en diffère infiniment peu, on obtient la formule

$$M'N' - MN = MM' \cdot \cos M'MT + NN' \cdot \cos N'NU,$$

qui montre que la différence M'N'—MN est égale à la somme algébrique des projections des distances MM' et NN' sur les tangentes extrêmes de l'arc MN.

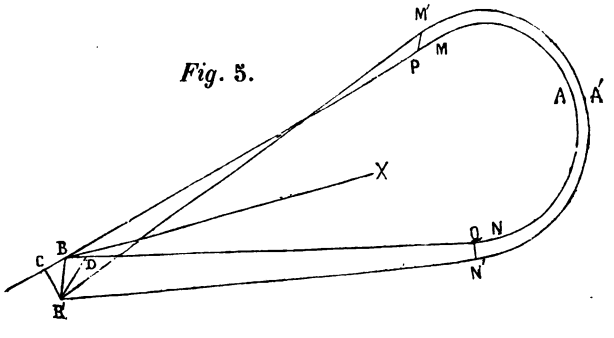
Nota : Ce théorème, aussi bien que celui qui précède, suppose que l'on a négligé, dans l'expression de la différence, des quantités infiniment petites devant la différence elle-même.

§ 3. — TRANSMISSION DU MOUVEMENT D'UN CORPS SOLIDE A UN AUTRE, AU MOYEN D'UN FIL SANS FIN QUI EMBRASSE LE PREMIER ET TRAVERSE UN ANNEAU INFINIMENT PETIT FIXÉ AU SECOND.

7. THÉORÈME. — *Lorsqu'un fil sans fin embrasse d'une part un corps solide fixe, et va de l'autre traverser un anneau mobile infiniment petit, sans cesser d'être tendu, le déplacement élémentaire de l'anneau est nécessairement perpendiculaire à la bissectrice de l'angle des deux brins rectilignes.*

Soit B l'anneau (fig. 5), MAN l'arc géodésique em-

Fig. 5.



brassé sur le corps par le fil, BM et BN les deux brins

rectilignes qui aboutissent à l'anneau et se confondent avec les tangentes extrêmes de l'arc MAN. Pendant un temps infiniment petit, qui sera dit du premier ordre, l'anneau subit un déplacement élémentaire BB'; le fil se déplace; il embrasse sur le corps un nouvel arc géodésique $M'A'N'$, dont les tangentes extrêmes sont $B'M'$ et $B'N'$. L'élément BB' est un infiniment petit du premier ordre; il en est de même des angles formés par les brins $B'M'$ et $B'N'$ avec les brins respectifs BM et BN : cela résulte de la continuité. D'ailleurs, la longueur du cordon reste invariable.

Projetons le point M' en P sur la tangente BM, le point N' en Q sur la tangente BN. Du théorème du numéro 6 il résulte que l'on a, aux infiniment petits près d'un ordre supérieur au premier, l'égalité

$$M'A'N' = PMANQ,$$

laquelle, vu l'inextensibilité du fil, entraîne la suivante :

$$BP + BQ = B'M' + B'N'.$$

Projetons maintenant le point B' en D sur NB, et en C sur MB prolongé; nous déterminerons ainsi les segments CP et DQ, projections respectives des brins $B'M'$ et $B'N'$, qui n'en diffèrent que par des infiniment petits d'un ordre supérieur au premier. Nous pourrons donc écrire les égalités

$$B'M' = BP + BC, \quad B'N' = BQ - BD,$$

qui, rapprochées de la précédente, conduisent à la condition

$$BC = BD,$$

d'où résulte l'égalité des triangles rectangles élémentaires BCB′ et BDB′. La droite BB′, distincte ou non de la bissectrice de l'angle CBD, est donc perpendiculaire à la bissectrice BX de l'angle MBN des deux brins rectilignes : ce qui était à démontrer.

8. On conclut évidemment de là que la vitesse de l'anneau B est perpendiculaire à la bissectrice BX.

9. THÉORÈME. — *Les liaisons étant les mêmes qu'au n°. 7, mais le corps solide étant en mouvement, la vitesse absolue v de l'anneau, et la vitesse u qu'il aurait s'il était lié d'une manière invariable avec le corps solide, ont à chaque instant même projection sur la bissectrice de l'angle des deux brins.*

Soient, en effet, les vitesses u et v représentées géométriquement par les droites BG et BH (fig. 6). La

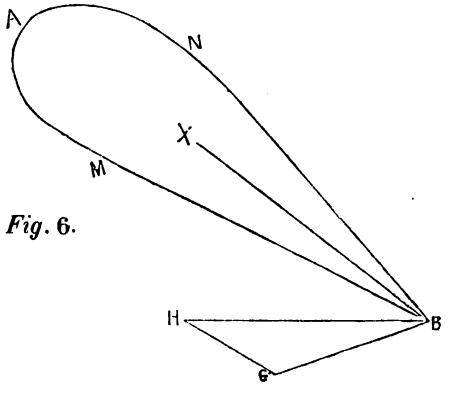


Fig. 6.

droite GH, qui va du point G au point H, représente alors la vitesse de l'anneau relativement au corps re-

gardé comme fixe. Or, ainsi qu'on l'a dit au numéro 8, cette dernière vitesse doit être perpendiculaire à la bissectrice BX de l'angle des deux brins. Donc, les droites BG et BH doivent avoir même projection sur BX.

10. PREMIER COROLLAIRE. *Transmission d'un mouvement rectiligne.*—Si l'anneau B se rattache à un second corps solide, et si chacun des corps a des liaisons telles qu'il ne puisse se mouvoir que parallèlement à une direction donnée, on déduit du théorème précédent un moyen simple de comparer à chaque instant leurs vitesses. Il consiste à mener par le point B, des droites BI et BK respectivement parallèles aux directions données des vitesses u et v, et à les terminer, en I et K, à un plan quelconque perpendiculaire à la bissectrice BX. Les longueurs BI et BK de ces droites sont directement proportionnelles aux vitesses u et v.

11. SECOND COROLLAIRE. *Transformations entre mouvement rectiligne et mouvement circulaire.* — Supposons que le corps embrassé par le fil soit assujetti à se mouvoir parallèlement à une direction donnée, et le corps auquel est fixé l'anneau à tourner autour d'un axe donné. Soit u la vitesse linéaire du premier, a la vitesse angulaire du second, r la distance du point B à l'axe de rotation. La vitesse absolue v du point B a pour grandeur ar, et sa direction est perpendiculaire au plan de l'axe et du point B. Les vitesses u et v ayant même projection sur la bissectrice, on est conduit à déterminer graphiquement le rapport $\frac{u}{a}$ de la manière suivante : on mène par le point B une première droite BK de longueur r, perpendiculaire au plan de l'axe et du point B, puis une seconde droite

BI parallèle à la direction de la translation, et que l'on termine à son point I de rencontre avec un plan mené par le point K perpendiculairement à la bissectrice; on a alors la proportion $\frac{u}{ar}=\frac{BI}{BK}$, qui donne, après simplification, l'égalité

$$\frac{u}{a}=BI.$$

12. Considérons maintenant le cas où le corps embrassé par le fil est mobile autour d'un axe donné, et l'autre parallèlement à une direction donnée. Appelons a la vitesse angulaire du premier, v la vitesse de translation du second; soit r la distance du point B à l'axe de rotation. La vitesse u est alors égale à ar, et sa direction est perpendiculaire au plan de l'axe et du point B. Les vitesses u et v ont même projection sur la bissectrice; on peut donc obtenir le rapport $\frac{v}{a}$ au moyen de la construction suivante : on mène par le point B une première droite BI de longueur r, perpendiculaire au plan de l'axe et du point B, puis une seconde droite BK parallèle à la direction de la translation, et que l'on termine à son point K de rencontre avec un plan mené par le point I perpendiculairement à la bissectrice; on a alors la relation $\frac{v}{ar}=\frac{BK}{BI}$, qui, simplifiée, devient

$$\frac{v}{a}=BK.$$

On voit qu'en réalité cette solution ne diffère pas

de la solution trouvée pour le cas précédent, chacune fournissant, par les mêmes constructions, à un moment quelconque, le rapport de la vitesse de translation à la vitesse de rotation.

13. TROISIÈME COROLLAIRE. *Transmission d'un mouvement circulaire.* — Le corps embrassé par le fil est mobile autour d'un axe donné, et le corps auquel est fixé l'anneau peut tourner autour d'un autre axe également donné. On veut comparer, à un instant quelconque, la vitesse angulaire a du premier à la vitesse angulaire b du second. Soient pour cela r et s les distances respectives du point B au premier axe de rotation et au second. La vitesse u est égale à ar, et la vitesse v égale à bs. Toutes deux ont même projection sur la bissectrice. Leurs directions sont connues, chacune d'elles étant perpendiculaire au plan de l'axe correspondant et du point B. On mène donc par ce point B des droites BI et BK respectivement parallèles aux directions de u et v, et on les termine, en I et K, à un plan quelconque perpendiculaire à la bissectrice. On obtient ainsi la relation $\frac{bs}{ar} = \frac{\text{BK}}{\text{BI}}$, d'où l'on tire

$$\frac{b}{a} = \frac{\text{BK}.r}{\text{BI}.s}.$$

La valeur de $\frac{b}{a}$ se réduit d'ailleurs au rapport de deux lignes, si l'on a eu soin de prendre BI égal à r, ou BK égal à s, en choisissant convenablement le plan perpendiculaire à la bissectrice, auquel se terminent les droites BI et BK.

§ 3. TRANSMISSION DU MOUVEMENT AU MOYEN DES LIAISONS DITES DE RÉVERBÈRE.

14. Voici en quoi consistent ces liaisons : un cordon est fixé en un point A d'une surface sur laquelle il embrasse l'arc géodésique AM (fig. 7); il la

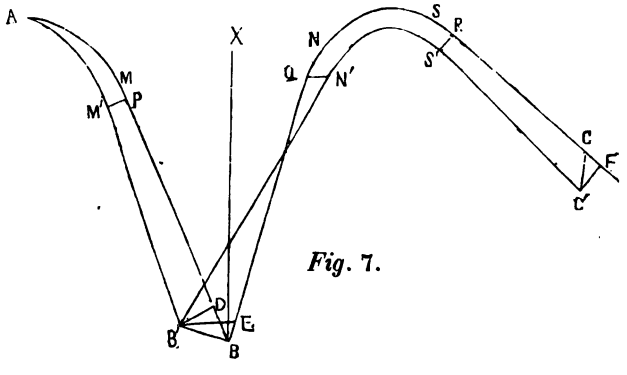


Fig. 7.

quitte en M, suivant la tangente extrême MB de cet arc, traverse en B un anneau infiniment petit, et prend une direction nouvelle BN, pour aller embrasser, sur une seconde surface, un arc géodésique NS de tangentes extrêmes NB et SC; enfin, il quitte cette surface en S, suit la tangente SC et se termine en C. Les deux surfaces restant fixes, le point B se déplace infiniment peu, ainsi que le point C, sans que le cordon cesse d'être tendu; le premier se transporte en B', le second en C'; les nouveaux arcs géodésiques embrassés sur les surfaces sont AM' et $N'S'$; et les nouveaux brins rectilignes sont $M'B'$, $B'N'$ et

s'c', tangentes extrêmes des nouveaux arcs. Cela posé,

15. THÉORÈME. *La projection sur le brin* SC *prolongé, du déplacement élémentaire* CC', *est égale à la somme des projections sur les brins* BM *et* BN, *du déplacement élémentaire* BB'.

En effet, projetons les points M' et B' sur MB, en P et D; les points B' et N' sur BN, en E et Q; les points S' et C' sur SC, en R et F; nous aurons, aux infiniment petits près du second ordre, les égalités

$$PD = M'B', \quad EQ = B'N', \quad RC = S'C' - CF.$$

D'ailleurs, en vertu des théorèmes des numéros 5 et 6, on a, dans la même approximation, les égalités suivantes :

$$AMP = AM', \quad QNSR = N'S'.$$

Si l'on ajoute les cinq relations membre à membre, la somme des premiers membres donne la longueur totale du cordon AC diminuée de BD et de BE; la somme des seconds membres donne la longueur totale du cordon AC' diminuée de CF; et, comme le cordon est inextensible, on en conclut la relation

$$CF = BD + BE,$$

qu'il s'agissait d'établir.

16. De là on déduit que la projection de la vitesse du point C sur le brin SC prolongé, est égale à la somme des projections, sur les brins BM et BN, de la vitesse du point B.

17. Il est facile de démontrer que cette somme de

projections est égale à la projection de la vitesse du point B sur la bissectrice BX de l'angle des deux brins, multipliée par le double du cosinus de la moitié de cet angle : ce qui fournit une expression simple du rapport des vitesses des points C et B, projetées respectivement sur le brin SC prolongé et sur la bissectrice BX.

18. Si l'anneau B, d'une part, et, de l'autre, l'extrémité C du cordon sont fixés à deux corps solides pour chacun desquels les liaisons sont complètes, le cordon permettra de transmettre le mouvement de l'un à l'autre. D'ailleurs, les directions des vitesses des points B et C seront connues pour chaque position du système; on pourra donc, en s'appuyant sur la remarque précédente, comparer à chaque instant leurs intensités. C'est ce que nous laissons au lecteur le soin de faire.

19. Si l'extrémité C reste immobile, ou si elle se déplace suivant une direction perpendiculaire à SC, la projection du déplacement BB′ sur la bissectrice doit être nulle : ce qui montre, comme au n°. 7, que le déplacement BB′ doit être dirigé perpendiculairement à la bissectrice.

§ 4. — TRANSMISSION DU MOUVEMENT AU MOYEN D'UN FIL QUI S'ENROULE ET SE DÉROULE.

20. Un fil inextensible AMNB (fig. 8), dont l'extrémité A est fixée en un point d'un premier corps solide, et l'extrémité B en un autre point d'un second corps solide, embrasse sur le premier l'arc géodé-

sique AM, sur le second l'arc géodésique BN, et va de

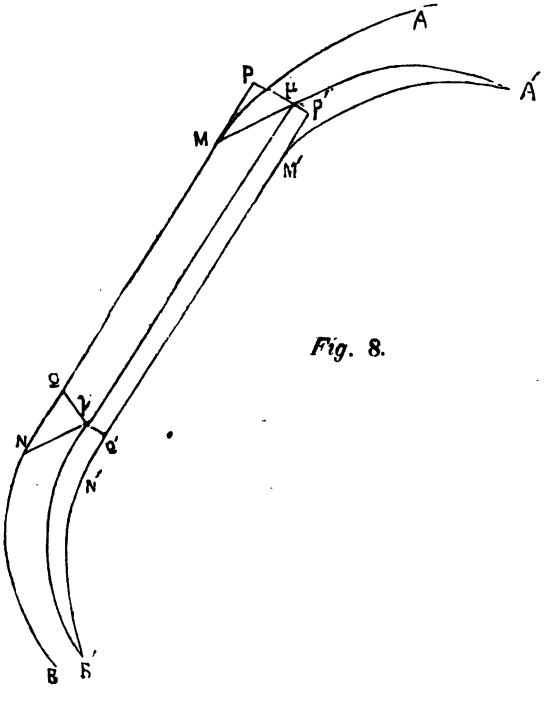


Fig. 8.

l'un à l'autre suivant la tangente commune MN. Les deux corps se déplacent infiniment peu, et le cordon, toujours tendu, affecte la figure nouvelle $A'M'N'B'$, où $M'N'$ est la tangente commune aux arcs géodésiques $A'M'$ et $B'N'$ embrassés sur les deux corps. L'arc AM tracé sur la première surface vient prendre la position $A'\mu$; l'arc BN tracé sur la seconde vient prendre la position $B'\nu$; les déplacements élémentaires des

points M et N des deux corps solides sont ainsi $M\mu$ et $N\nu$. Cela posé,

THÉORÈME. — *Les déplacements élémentaires* $M\mu$ *et* $N\nu$ *ont sur* MN *des projections égales.*

Pour le prouver, joignons le point μ au point ν par la droite $\mu\nu$; projetons le point ν en Q et Q' sur les droites MN et $M'N'$, le point μ en P et P' sur les mêmes droites prolongées. Les segments PQ et $P'Q'$ diffèrent entre eux d'un infiniment petit du second ordre, comme étant les projections d'une même droite $\mu\nu$ sur les droites MN et $M'N'$ qui forment avec $\mu\nu$ des angles infiniment petits du premier ordre. On peut donc écrire

$$PQ = P'Q'.$$

D'une autre part on a, vu l'inextensibilité du fil,

$$AMNB = A'M'N'B',$$

ou

$$AM + MN + NB = A'M' - M'P' + P'Q' + Q'N' + N'B'.$$

Des deux membres de cette égalité, retranchons, d'une part, les quantités NB et $Q'N' + N'B'$, comme toutes deux égales à $\nu B'$, de l'autre, les quantités AM et $A'M' - M'P'$, comme toutes deux égales à $A'\mu$; il viendra

$$MN = P'Q'.$$

On en conclut

$$MN = PQ,$$

et par conséquent

$$MP = NQ,$$

ce qu'il s'agissait de démontrer.

21. On peut dire encore que les vitesses u et v des points M et N des deux corps solides, ont sur le brin MN des projections égales.

22. COROLLAIRE. — Si, pour chacun des corps solides, et abstraction faite du cordon, les liaisons sont complètes, on connaît à chaque instant les directions des vitesses u et v; le théorème qui précède, peut servir alors, de la manière suivante, à comparer leurs intensités : on prend sur la droite MN (fig. 9),

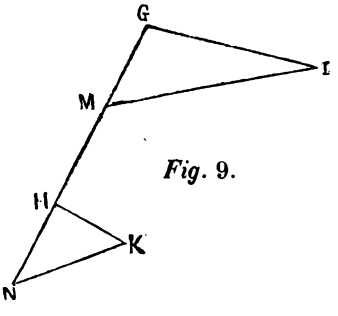


Fig. 9.

à partir des points M et N et dans le même sens, des longueurs égales MG et NH, arbitraires d'ailleurs. On mène par les points G et H des plans perpendiculaires à la droite MN, et par les points M et N des droites MI et NK respectivement parallèles aux directions des vitesses u et v; on limite ces droites à leurs points I et K de rencontre avec les plans respectifs, et l'on a, comme il est facile de le démontrer, la proportion

$$\frac{v}{u} = \frac{NK}{MI}.$$

23. Si les liaisons ne permettent aux deux corps solides que des mouvements de translation ou de rotation, la formule précédente fournit un moyen simple d'en comparer à chaque instant les vitesses. Ainsi :

Primo.—Les deux mouvements étant de translation, elle donne immédiatement le rapport de leurs vitesses linéaires ;

Secundo. — Le premier corps tournant avec la vitesse angulaire a autour d'un axe situé à la distance r du point M, et le second corps ayant un mouvement de translation de vitesse linéaire v, on a la formule

$$\frac{v}{ar} = \frac{\text{NK}}{\text{MI}},$$

ou simplement

$$\frac{v}{a} = \text{NK},$$

si l'on a pris MI égal à r, en disposant convenablement de la longueur MG ;

Tertio. — Le mouvement du premier corps et celui du second consistant en des rotations effectuées autour d'axes qui passent respectivement à des distances r et s des points M et N, et les vitesses angulaires étant respectivement a et b, on a la formule

$$\frac{b}{a} = \frac{r.\text{NK}}{s.\text{MI}},$$

où le second membre se réduit au rapport de deux lignes, si l'on a eu soin de prendre MI égal à r, ou NK égal à s.

§ 5. — CAS GÉNÉRAL DE LA TRANSMISSION DU MOUVEMENT AU MOYEN D'UNE MOUFLE FIXE ET D'UNE MOUFLE MOBILE.

24. Un fil a l'une de ses extrémités fixée en un point A (fig. 10) d'un premier corps solide; il va de

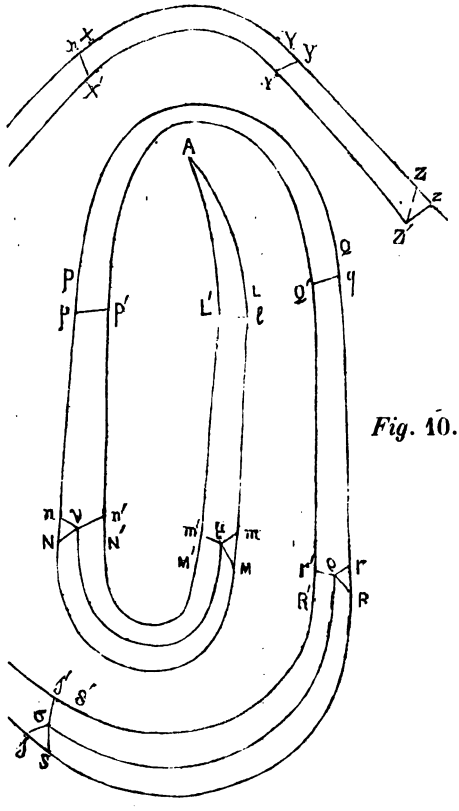


Fig. 10.

ce corps à un second, revient au premier, retourne

au second, et ainsi de suite, embrassant successivement sur chacun de ces corps les arcs géodésiques AL, MN, PQ, RS, .. que réunissent deux à deux les tangentes communes LM, NP, QR, ... Soit, sur le premier corps, XY le dernier arc embrassé par le cordon, YZ sa tangente en Y, et Z l'autre extrémité du fil supposée libre. Le premier corps est fixe ; le second est mobile ; il se déplace infiniment peu ; l'extrémité Z aussi, et de telle sorte que le fil reste tendu. On veut comparer ces deux déplacements.

On remarquera, pour cela, que l'accroissement Δ de la longueur du fil après le déplacement est nul, et l'on égalera à zéro l'expression développée de Δ, en négligeant les infiniment petits d'un ordre supérieur au premier.

Soient AL', $M'N'$, $P'Q'$, $R'S'$, .. les nouveaux arcs embrassés ; $L'M'$, $N'P'$, $Q'R'$, .. leurs tangentes communes ; $X'Y'$ le dernier arc ; $Y'Z'$ le dernier brin rectiligne, touchant l'arc en Y' et se terminant en Z' : en sorte que ZZ' est le déplacement élémentaire du point Z.

25. Projetons les points L', P' Q' .. X', Y' respectivement en l, p, q, .. x, y, sur les tangentes en L, P, Q, .. X, Y ; nous aurons, d'après ce qui a été vu aux n^{os}. 5 et 6, les égalités

$$AL'=AL\,l,\quad P'Q'=p\,PQ\,q,\quad \ldots\quad X'Y'=x\,XY\,y,$$

qui montrent que, dans la différence Δ, on peut négliger toutes les portions du fil appliquées sur le corps solide fixe, à la condition de limiter en l, p, q, .. x, y, et non en L, P, Q, .. X, Y, les brins qui aboutissent à ce corps avant le déplacement.

Soient $\mu\nu$, $\rho\sigma$, .. les positions que viennent prendre,

après le déplacement, les arcs géodésiques MN, RS, .. que le cordon recouvrait d'abord sur le corps mobile : en sorte que $M\mu$, $N\nu$, $R\rho$, $S\sigma$, .. représentent les déplacements élémentaires des points M, N, R, S, .. de ce corps. Projetons les points μ, ν, ρ, σ, .. en m', n', r', s', .., sur les tangentes respectives issues des points M', N', R', S', .. ; nous aurons, en vertu du théorème du n°. 6, les égalités

$$\mu\nu = m'M'N'n', \quad \rho\sigma = r'R'S's', \quad ..,$$

ou les suivantes :

$$MN = m'M'N'n', \quad RS = r'R'S's', \quad ..,$$

qui montrent que, dans la différence Δ, on peut faire abstraction des portions du fil appliquées sur le corps solide mobile, à la condition de limiter en m', n', r', s', .., et non en M', N', R', S', .., les brins qui aboutissent à ce corps après le déplacement.

Projetons enfin le point Z' en z, sur le brin YZ prolongé, ce qui donne

$$Y'Z' - yZ = Zz.$$

Nous pourrons écrire alors

$$\Delta = L'm' - lM + P'n' - pN + Q'r' - qR + \ldots + Zz.$$

Cette valeur de Δ, égalée à zéro, donne

$$Zz = (lM - L'm') + (pN - P'n') + (qR - Q'r') + \text{etc.}$$

Projetons maintenant les points μ, ν, ρ, σ, .. en m, n, r, s, .., sur les tangentes issues des points M, N, R, S, .., et remarquons les égalités

$$lm = L'm', \quad pn = P'n', \quad qr = Q'r', \quad ..,$$

dans chacune desquelles les deux membres représentent les projections d'une même droite (L$'\mu$, ou P$'\nu$, ou Q$'\rho$, ..) sur deux autres droites formant avec la première des angles infiniment petits du premier ordre ; nous obtiendrons alors, pour expression simplifiée de zz, celle que fournit la relation

$$zz = Mm + Nn + Rr + \text{etc.}$$

Or, les éléments zz, Mm, Nn, Rr, .. sont les projections respectives des déplacements élémentaires simultanés zz', $M\mu$, $N\nu$, $R\rho$, .. sur les brins YZ, ML, NP, RQ, .. , et ces déplacements sont proportionnels aux vitesses avec lesquelles ils s'effectuent. Donc :

THÉORÈME. — *La projection sur le brin extrême, de la vitesse de l'extrémité libre du fil, est égale à la somme des projections respectives, sur les brins qui partent du corps mobile, des vitesses des points de ce corps dans lesquels a lieu le contact avec les brins eux-mêmes.*

26. On sait que tout déplacement infiniment petit d'un corps solide peut être considéré comme résultant de la coexistence de deux mouvements, l'un de rotation autour d'un axe, l'autre de translation parallèlement à cet axe. De plus, on sait que, si pour ce corps les liaisons sont complètes, elles déterminent à chaque instant la position de l'axe et le rapport de la vitesse linéaire v de translation à la vitesse angulaire a de rotation.

Or, supposons qu'effectivement les liaisons soient complètes pour le corps mobile, et considérons le

système dans une position particulière quelconque. Soit alors $\frac{v}{a}$ égal à $\frac{h}{2\pi}$, h étant donné; soient de plus d_M, d_N, d_R, .. les distances connues des points M, N, R, .. à l'axe. Appelons u la projection sur le brin extrême, de la vitesse du point Z, et voyons à comparer u à a, et par suite à v, afin de savoir quelles vitesses de déplacement du corps répondent à une vitesse u donnée.

En chacun des points M, N, R, .. de contact, la vitesse v_M, ou v_N, ou v_R, .., du corps mobile est la résultante de deux autres, l'une v parallèle à l'axe, l'autre perpendiculaire au plan de l'axe et du point de contact, et de grandeur égale au produit de a par la distance d_M, ou d_N, ou d_R, ... On peut donc, pour former la somme des projections sur les brins ML, NP, RQ, .., des vitesses des points M, N, R, .., projeter d'abord les vitesses v parallèles à l'axe, puis les vitesses ad_M, ad_N, ad_R, .. perpendiculaires au plan de l'axe et du point de contact. Or, il est facile de reconnaître, d'une part, que la somme des projections des vitesses v sur les brins ML, NP RQ, .. est, au facteur v près, égale à la somme des projections sur l'axe, de longueurs égales à l'unité portées à partir des points M, N, R, .., sur chacun des brins; de l'autre, que la somme des projections des vitesses ad_M, ad_N, ad_R, .. sur les brins qui leur correspondent, est, au facteur a près, égale à la somme des moments par rapport à l'axe, des mêmes longueurs égales à l'unité portées à partir des points M, N, R, .., sur chacun des brins. Si donc Bv représente la première somme, et Ca la seconde, B et C sont des quantités que l'on saura déter-

miner, et le théorème du n°. 25 fournira la formule

$$u = Bv + Ca,$$

qui peut s'écrire encore

$$u = \left(B\frac{h}{2\pi} + C\right)a,$$

et fournit, à chaque instant, la valeur du rapport $\frac{u}{a}$.

27. On peut remarquer le cas particulier d'une simple translation, auquel répond la formule

$$u = Bv,$$

et celui d'une simple rotation, pour lequel on a

$$u = Ca.$$

Dans les deux cas on obtient donc aisément le rapport des vitesses.

§ **6**. — TRANSMISSION DU MOUVEMENT AU MOYEN D'UN FIL SANS FIN RELIANT DEUX CORPS SOLIDES ET EMBRASSANT UNE OU PLUSIEURS FOIS CHACUN D'EUX.

28. Supposons d'abord l'un des corps fixe, l'autre seul étant mobile. Ce cas ne diffère du cas traité dans le paragraphe précédent, qu'en ce qu'il n'y a plus pour le cordon de portions extrêmes AL et YZ. Alors il est aisé de voir qu'on doit modifier le théorème du n°. 25, en l'énonçant de la manière suivante :

THÉORÈME. — *Quelque déplacement que l'on considère, si le cordon reste tendu, la somme des projections sur*

les brins ML, NP, RQ, .. (fig. 11), *des vitesses des points*

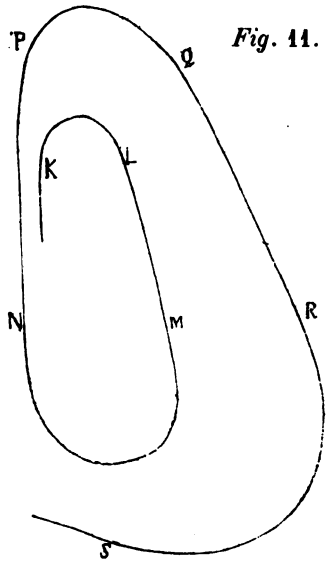


Fig. 11.

M, N, R, .. *du corps mobile, est égale à zéro.*

Ce théorème conduit à la relation

$$Bv + Ca = 0,$$

comme cela résulte des explications données au n°. 26.

29. Considérons maintenant le cas où les deux corps seraient mobiles, et faisons subir au système, pris dans l'une quelconque de ses positions, un dérangement infiniment petit. Soient, pour le premier corps, v' et a' les vitesses simultanées de translation et de rotation répondant à un premier axe ; soient, pour le second corps, v'' et a'' les mêmes éléments répondant à un second axe ; les déplacements élé-

mentaires (v', a') et (v'', a'') étant d'ailleurs supposés tels que le cordon ne cesse pas d'être tendu. On peut ensuite, sans altérer les positions relatives, imprimer solidairement à tout le système un déplacement élémentaire $(-v', -a')$ égal et contraire à celui qu'a subi le premier corps. De la sorte, le premier corps revient à sa position primitive, et le second prend celle à laquelle l'amèneraient les deux déplacements élémentaires simultanés $(-v', -a')$ et (v'', a'') effectués respectivement autour du premier axe et autour du second. On aperçoit alors que le cordon ne doit pas cesser d'être tendu, si, le premier corps restant fixe, le second subit les deux déplacements élémentaires simultanés $(-v', -a')$ et (v'', a''); et l'on rentre dans le cas traité au numéro précédent.

Or, soient $v''_1, v''_2, v''_3, \ldots$ les vitesses effectives des points M, N, R, .. du second corps, dues au déplacement (v'', a''); soient $v'_1, v'_2, v'_3, \ldots$ les vitesses qu'auraient les mêmes points M, N, R, .. s'ils subissaient le déplacement (v', a') solidairement avec le premier corps. Que l'on imprime maintenant au second corps les déplacements simultanés $(-v', -a')$ et (v'', a''); et soient $v_1, v_2, v_3, \ldots$ les vitesses des points M, N, R, .. ; v_1 est la résultante des vitesses v''_1 et $-v'_1$, v_2 la résultante des vitesses v''_2 et $-v'_2$, v_3 la résultante des vitesses v''_3 et $-v'_3$, ... On déduit donc du théorème du n°. 28 la propriété suivante :

THÉORÈME. — *Les deux corps se mouvant sans que le cordon cesse d'être tendu, la somme des projections sur les brins* ML, NP, RQ, .., *des vitesses effectives des points* M, N, R, .. *du second corps, est toujours égale à la somme*

des projections sur les mêmes brins, des vitesses qu'auraient les points M, N, R, .., *s'ils étaient liés d'une manière invariable avec le premier corps.*

De ces deux sommes, l'une a la forme $B'v'+C'a'$, et l'autre la forme $B''v''+C''a''$; B' et B'' y représentent les sommes respectives des projections sur le premier axe et sur le second, de longueurs égales à l'unité portées à partir des points M, N, R, .., sur les brins ML, NP, RQ, .. ; C' et C'' y sont les sommes respectives des moments des mêmes longueurs par rapport au premier axe et par rapport au second. On a donc la formule

$$B'v'+C'a'=B''v''+C''a''.$$

Supposons que, pour chacun de ces corps, les liaisons soient complètes. Elles font connaître alors, à l'instant considéré, la position des deux axes, et fournissent par conséquent les valeurs des quantités B', B'', C' C''. Elles font connaître, en outre, les valeurs des rapports $\frac{v'}{a'}$ et $\frac{v''}{a''}$, que nous représenterons respectivement par $\frac{h'}{2\pi}$ et $\frac{h''}{2\pi}$. L'égalité précédente pourra donc s'écrire

$$\left(B'\frac{h'}{2\pi}+C'\right)a'=\left(B''\frac{h''}{2\pi}+C''\right)a''.$$

On en déduit

$$\frac{a''}{a'}=\frac{B'h'+2\pi C'}{B''h''+2\pi C''};$$

ce qui permet de comparer, à chaque instant, les vi-

tesses de déplacement des deux corps solides reliés par le fil sans fin.

30. S'il s'agit de simples translations des deux corps, on a la formule

$$B'v' = B''v''.$$

S'il s'agit de simples rotations, on a la suivante :

$$C'a' = C''a''.$$

Si, enfin, une translation de l'un des corps est associée à une rotation de l'autre, on a l'une des deux relations

$$B'v' = C''a'' \text{ , } C'a' = B''v''.$$

Dans tous les cas on est donc à même de comparer les vitesses.

31. *Nota :* Les propriétés établies dans le présent paragraphe s'étendent au cas où le fil, au lieu d'être sans fin, aurait chacune de ses extrémités fixée à l'un ou à l'autre des deux corps solides.

Caen, typ. de A. Hardel.

EXTRAIT

DU CATALOGUE DE LA LIBRAIRIE DE A. HARDEL,

IMPRIMEUR-LIBRAIRE, RUE FROIDE, 2,

A CAEN.

ABÉCÉDAIRE ou RUDIMENT D'ARCHÉOLOGIE (architecture religieuse); par M. DE CAUMONT. 1 vol. in-8°. orné de 600 vignettes. Pr. : 7 fr. 50.

ABÉCÉDAIRE ou RUDIMENT D'ARCHÉOLOGIE (architectures civile et militaire); par M. DE CAUMONT. 1 vol. in-8°. orné d'un grand nombre de vignettes. Prix : 7 fr. 50.

ABÉCÉDAIRE D'ARCHÉOLOGIE (ère gallo-romaine). 1 vol. in-8°. orné d'un grand nombre de vignettes. Prix : 7 fr. 50 c.

COURS D'ANTIQUITÉS MONUMENTALES, par le Même. 6 volumes in-8°. et atlas; chaque volume se vend séparement avec un atlas. Prix : 12 fr.

BULLETIN MONUMENTAL ou collection de Mémoires et de renseignements pour servir à la confection d'une statistique des monuments de la France, classés chronologiquement, par M. DE CAUMONT, 1re. série, 10 vol. in 8°.; 2e. série, 10 vol. in-8°. ornés d'un grand nombre de planches. Prix de chacun : 12 fr. On fait une remise aux personnes qui prennent une série entière.

STATISTIQUE MONUMENTALE DU CALVADOS, par M. DE CAUMONT. In-8°. avec planches et un grand nombre de vignettes. Quatre volumes ont paru. Prix de chacun: 10 fr.

FLORE DE LA NORMANDIE, par M. DE BRÉBISSON, membre de plusieurs Sociétés savantes. — PHANÉROGAMIE. 1 vol. in-12. Troisième édition. Prix: 6 fr.

MÉMOIRES DE LA SOCIÉTÉ DES ANTIQUAIRES DE NORMANDIE. 2e. série, 9 vol. in-4°. Prix de chacun : 15 fr.

ANTIQUITÉS DE LA VILLE DE CAEN, par M. DE BRAS, 1 gros vol. in-8°. sur raisin. Prix : 10 fr.

GLOSSAIRE DU PATOIS NORMAND, par M. LOUIS DU BOIS; augmenté des deux tiers, et publié par M. JULIEN TRAVERS. 1 volume in-8°. Prix: 10 fr.

CAEN, PRÉCIS DE SON HISTOIRE, SES MONUMENTS, SON COMMERCE ET SES ENVIRONS; par M. G.-S. TREBUTIEN. 2e. édition, revue et considérablement augmentée. Prix: 1 fr. 50 c.

HISTOIRE DE L'ABBAYE DE SAINT-ÉTIENNE DE CAEN. 1065-1790. 1 vol. in-4°. avec planches, par M. C. HIPPEAU, professeur à la Faculté des lettres de Caen. Prix : 15 fr.

à Monsieur Souillart
2651
Hommage de l'Auteur

CINÉMATIQUE.

THÉORÈMES GÉNÉRAUX

RELATIFS A LA TRANSMISSION DU MOUVEMENT PAR CONTACT IMMÉDIAT.

PAR

M. CH. GIRAULT,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE CAEN.

Extrait des Mémoires de l'Académie des Sciences, Arts et Belles-Lettres de Caen.

Cas. 79
no 101

CAEN,

TYPOGRAPHIE DE A. HARDEL, LIBRAIRE,

RUE FROIDE, 2.

1862.

2657

Alexandre Giraud

CINÉMATIQUE.

THÉORÊMES GÉNÉRAUX

RELATIFS A LA TRANSMISSION DU MOUVEMENT PAR CONTACT IMMÉDIAT ;

PAR

M. CH. GIRAULT,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE CAEN.

Extrait des Mémoires de l'Académie des Sciences, Arts et Belles-Lettres de Caen.

CAEN,

TYPOGRAPHIE DE A. HARDEL, LIBRAIRE,

RUE FROIDE, 2.

—

1862.

CINÉMATIQUE.

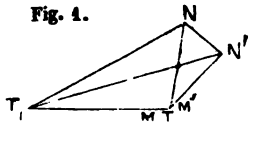
THÉORÈMES GÉNÉRAUX

RELATIFS A LA TRANSMISSION DU MOUVEMENT PAR CONTACT IMMÉDIAT.

1. Lorsque deux corps solides, terminés par des surfaces continues, se meuvent en se touchant toujours par un de leurs points, il arrive généralement que le lieu du contact se déplace d'une manière continue sur l'une et sur l'autre des surfaces et dans l'espace, en même temps que la direction du plan tangent commun varie d'une manière continue.

Ainsi, les deux surfaces s et s' se touchant au point T de l'espace (fig. 1), par les points M et M', un

Fig. 1.



déplacement élémentaire du système, effectué pendant l'élément θ du temps, fait décrire au point M l'élément MN, au point M' l'élément $M'N'$; le point T de

contact parcourt dans l'espace l'élément TT_1, sur S l'élément NT_1, sur S' l'élément $N'T_1$; les chemins simultanés TT_1, NT_1, $N'T_1$ sont généralement des infiniment petits de l'ordre de θ, ou du premier ordre, et il en est de même de l'angle que forment entre eux les plans tangents communs répondant aux deux points T et T_1 de contact; les vitesses des points M et M' sont dirigées suivant MN et M'N', et ont pour grandeur $\frac{MN}{\theta}$ et $\frac{M'N'}{\theta}$; NN' est l'arc élémentaire de glissement, et la vitesse de glissement est $\frac{NN'}{\theta}$.

On posera

$$v = \frac{MN}{\theta}, \quad v' = \frac{M'N'}{\theta}, \quad u = \frac{NN'}{\theta};$$

ce qui entraîne

$$\frac{v'}{v} = \frac{M'N'}{MN}, \quad \frac{u}{v} = \frac{NN'}{MN}.$$

2. Supposons que les deux surfaces S et S' se transmettent de l'une à l'autre le mouvement, et considérons le cas le plus ordinaire où les vitesses v et v' ont des valeurs finies, et sont dirigées en dehors du plan tangent commun. Dans ce cas, MN et M'N' sont des infiniment petits du premier ordre, et l'on peut considérer les points N et N' comme situés, non pas sur les surfaces S et S', mais sur le plan tangent commun du point T_1, puisque cela revient à négliger dans MN et M'N' des infiniment petits du second ordre. On peut encore, au même titre, considérer les points N et N'

comme situés, non plus dans le plan tangent commun du point T_1, mais dans le plan mené par le point T_1 parallèlement au plan tangent commun du point T, puisque l'angle des deux plans tangents communs est infiniment petit. Cela posé, on voit que les deux éléments MN et M'N', assimilables à des éléments interceptés entre deux plans parallèles, ont tous deux pour projection sur la normale commune du point T la portion de cette normale comprise entre les deux plans parallèles. Il est facile d'en conclure la propriété suivante :

THÉORÈME. — *Si deux corps solides, terminés par des surfaces continues, se touchent par les points* M *et* M', *et si l'un conduit l'autre, les vitesses des points* M *et* M' *ont à chaque instant même projection sur la normale commune.*

Soient, en effet, TZ (fig. 2) la normale commune

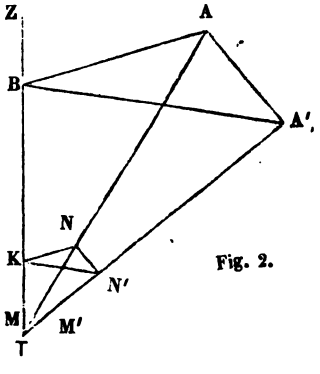


Fig. 2.

du point T ; TK la projection sur TZ, des deux élé-

ments MN et M'N'; MA et M'A' les droites qui représentent les vitesses v et v' en grandeur et en direction. Prenons sur TZ une longueur TB dont le rapport à TA soit égal au rapport de TK à TN. Les longueurs TB, TA et TA' sont alors proportionnelles aux longueurs TK, TN et TN'; par suite, les droites BA et BA' sont perpendiculaires à TZ, comme parallèles aux droites KN et KN'; d'où il résulte que TB est la projection sur TZ des deux vitesses TA et TA'.

3. Le rapport $\frac{u}{v}$, égal au rapport $\frac{NN'}{MN}$, est aussi égal au rapport $\frac{AA'}{MA}$; et, comme MA est égal à v, il en résulte que AA' est égal à u. Ainsi, dans le triangle ATA', on a

$$TA=v,\ TA'=v',\ AA'=u;$$

donc :

THÉORÈME. — *La vitesse de glissement des deux surfaces l'une contre l'autre est mesurée par la distance des extrémités des droites issues du point de contact et représentant les vitesses absolues des points par lesquels se touchent ces surfaces.*

La vitesse de glissement ne peut donc être nulle que si les vitesses v et v' se confondent.

4. Si, par suite des liaisons qui assujettissent séparément les deux corps solides donnés, on connaît *a priori* les directions des vitesses v et v', on peut obtenir les grandeurs relatives de ces vitesses et de la vitesse de glissement u, en appliquant la règle suivante, facile à justifier par ce qui précède :

THÉORÈME. — *Les deux surfaces se conduisant l'une l'autre par les points* M *et* M′, *si l'on mène, d'un point quelconque de l'espace, des droites respectivement parallèles aux vitesses v et v′ des deux points* M *et* M′, *et terminées au plan tangent commun ou à tout autre plan parallèle, les longueurs de ces droites sont directement proportionnelles aux vitesses v et v′, et la distance des extrémités de ces droites est proportionnelle à la vitesse u de glissement.*

5. Dans le triangle TAA′ (fig. 3) formé par les trois

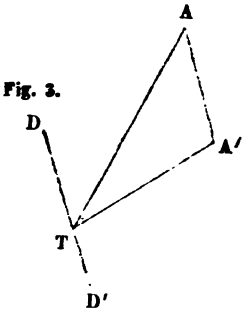


Fig. 3.

vitesses, on a

$$\frac{TA}{TA'} = \frac{\sin A'}{\sin A}.$$

Or, le plan TAA′ des vitesses coupe le plan tangent commun suivant une droite DD′ parallèle à AA′ et formant avec TA et TA′ des angles α et α' respectivement égaux à A et A′; en sorte que l'on a aussi

$$\frac{v}{v'} = \frac{\sin \alpha'}{\sin \alpha}. \qquad (1)$$

Le même triangle donne la relation

$$AA' = AT.\cos A + A'T.\cos A',$$

qui peut s'écrire

$$u = v\cos\alpha + v'\cos\alpha'. \tag{2}$$

On peut énoncer comme suit ces résultats :

THÉORÈME. — *Les vitesses v et v' des deux points par lesquels se touchent les deux surfaces, sont réciproquement proportionnelles aux sinus des angles α et α' formés par leurs directions respectives avec la trace du plan tangent commun sur le plan des vitesses ; et la vitesse de glissement est égale à la somme des vitesses v et v' multipliées respectivement par les cosinus des mêmes angles α et α'.*

Appliquons les principes généraux qui précèdent, au cas où les mouvements considérés consistent dans des translations rectilignes ou dans des rotations autour d'axes fixes.

§ 1er. — TRANSFORMATION D'UN MOUVEMENT RECTILIGNE DANS UN MOUVEMENT RECTILIGNE.

6. La surface s est mobile suivant la direction ox

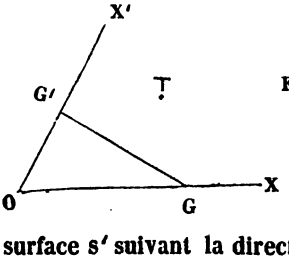


Fig. 4.

(fig. 4), et la surface s' suivant la direction ox'. Ces

deux surfaces sont en contact, et l'une conduit l'autre. Il résulte du théorême du n°. 4, que, si G et G′ sont à chaque instant les points de rencontre de OX et OX′ avec le plan tangent commun, les vitesses de translation v et v' de S et S′, et la vitesse de glissement u de S contre S′, sont à chaque instant proportionnelles aux droites OG, OG′ et GG′.

7. La vitesse de glissement, on peut le remarquer, n'est donc jamais nulle quand les directions des translations sont distinctes.

8. *Rapport des vitesses constant :* Pour que le rapport des vitesses de translation reste constant pendant toute la durée du mouvement du système, il faut que la trace du plan tangent commun sur le plan XOX′ conserve une direction constante, ce qui arrive en particulier quand les deux surfaces consistent dans des cylindres parallèles entre eux et parallèles au plan XOX′.

§ 2. — TRANSFORMATION D'UN MOUVEMENT RECTILIGNE DANS UN MOUVEMENT CIRCULAIRE, ET TRANSFORMATION RÉCIPROQUE.

9. CAS GÉNÉRAL. La surface S se meut parallèlement à la droite OX (fig. 5) avec la vitesse linéaire v, et la surface S′ tourne autour de l'axe EF avec la vitesse angulaire a. Du point T de contact des deux surfaces on abaisse sur l'axe EF la perpendiculaire TC; on construit les droites TA et TA′ qui représentent les vitesses linéaires des points M et M′ par lesquels se touchent S et S′; on joint AA′. La droite TA, parallèle

à OX, est égale à v; la droite TA′, perpendiculaire au

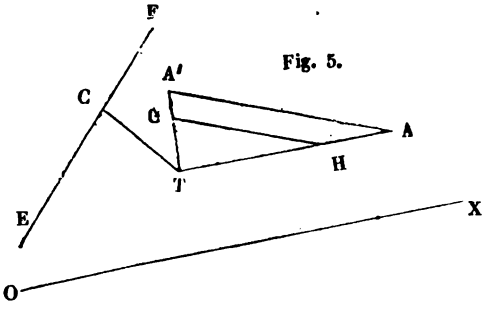


Fig. 5.

plan TEF, est égale à $a \times$ CT. Si donc on prend sur TA′ la longueur TG égale à CT, et que l'on mène par le point G un plan parallèle au plan tangent commun, et rencontrant en H la droite TA; si l'on construit en outre la droite GH, laquelle est parallèle à A′A, le rapport de TA à TH, égal du rapport de TA′ à TG, est alors égal à a; en sorte que l'on a

$$v = a \times \text{TH},$$

ou

$$\frac{v}{a} = \text{TH};$$

ce qui fournit une représentation géométrique du rapport des vitesses de translation et de rotation.

10. *Remarque :* La vitesse de glissement AA′ ne prenant la valeur zéro que si les droites TA et TA′ sont égales et coïncident, ce cas ne peut évidemment se présenter que pour une translation OX perpendiculaire à la direction de l'axe EF de rotation, et lorsque le point T de contact arrive dans le plan mené suivant cet axe perpendiculairement à la direction de la translation.

10

à c

plar
la le
poir
et r'
outr
rapp
alor:

ou

ce q
rapp(
10
pren
égale
prése
à la d
point
cet a
transl

11. Cas d'une translation perpendiculaire a l'axe de la rotation. Prenons pour plan de la figure 6, le plan perpendiculaire à l'axe et renfermant

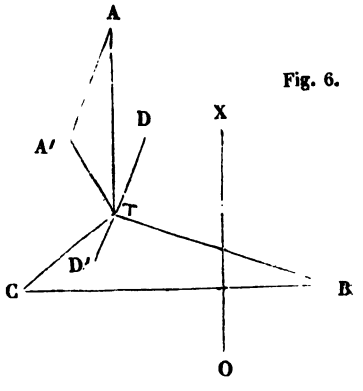


Fig. 6.

le point T ; réduisons cet axe au point C situé dans le plan. Le triangle TAA′ des vitesses est lui-même situé dans ce plan ; et l'on y peut placer la droite OX qui assigne la direction de la translation. Formons sur CT le triangle CTB dont le côté CB est perpendiculaire à OX, et le côté TB perpendiculaire à la trace DD′ du plan tangent commun sur le plan des vitesses. Ce triangle CTB est semblable au triangle TAA′ ; en sorte que le rapport de TA à CB est égal à celui de TA′ à CT, ou égal à a. On en conclut

$$\frac{v}{a} = CB.$$

12. Remarquons, maintenant, que TB est, sur le plan de la figure, la projection de la normale com-

mune, et que CB est, sur ce même plan, la trace du plan mené suivant l'axe perpendiculairement à OX. La normale commune perce donc ce dernier plan en un certain point N qui se projette en B sur le plan de la figure. On en conclut aisément que le segment CB mesure la distance de l'axe au point N.

D'une autre part, le rapport de AA′ à TB est aussi égal à a ; et l'on a en conséquence la relation

$$\frac{u}{a} = \text{TB},$$

laquelle fournit une représentation géométrique du rapport des vitesses de glissement et de rotation. Donc :

THÉORÈME. — *Si deux surfaces se conduisent l'une l'autre, la première étant mobile autour d'un axe et la seconde parallèlement à une droite perpendiculaire à l'axe ; si l'on mène suivant l'axe un plan perpendiculaire à la direction de la translation, et que l'on termine à ce plan la normale commune ;* 1°. *le rapport de la vitesse linéaire de translation à la vitesse angulaire de rotation est égal à la distance de l'axe à l'extrémité de la normale commune ;* 2°. *le rapport de la vitesse linéaire de glissement à la vitesse angulaire de rotation est égal à la projection de la normale commune sur un plan perpendiculaire à l'axe.*

18. *Rapport des vitesses constant :* Il résulte du théorême précédent, que le rapport $\frac{v}{a}$ ne peut être constant que si CB lui-même est constant, c'est-à-dire

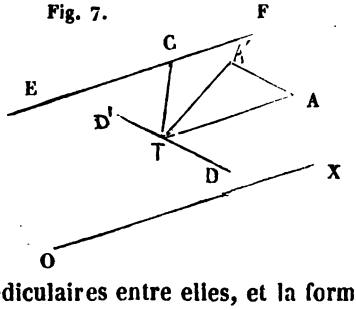
si l'extrémité de la normale commune reste toujours à la même distance de l'axe.

Si les surfaces qui se conduisent consistent dans des cylindres parallèles à l'axe, on peut dire que le rapport $\frac{v}{a}$ des vitesses est constant quand le plan normal commun mené suivant la génératrice de contact rencontre toujours suivant la même droite le plan passant par l'axe de rotation et perpendiculaire à la direction de la translation ; la distance constante de l'axe à cette droite, qui lui est parallèle, représentant la valeur du rapport $\frac{v}{a}$.

C'est sur ce principe que repose la construction géométrique de l'engrenage d'une roue avec une crémaillère.

14. CAS D'UNE TRANSLATION PARALLÈLE A L'AXE DE ROTATION. Dans ce cas, les droites TA et TA′ (fig. 7)

Fig. 7.



sont perpendiculaires entre elles, et la formule (1) du n°. 5 donne la relation

$$\frac{v}{v'} = \frac{1}{\text{tg ATD}},$$

d'où l'on déduit

$$\frac{v}{a} = \frac{CT}{tgATD}.$$

La droite DD' d'ailleurs est une tangente commune, et elle est perpendiculaire à CT, comme étant située dans le plan ATA'. Donc :

THÉORÈME. — *Si, de deux surfaces en contact, l'une est mobile autour d'un axe et l'autre parallèlement à cet axe, et si l'une conduit l'autre, le rapport de la vitesse linéaire de translation à la vitesse angulaire de rotation est égal à la plus courte distance du point de contact à l'axe, divisée par la tangente trigonométrique de l'angle que forme avec l'axe la tangente commune perpendiculaire à la plus courte distance.*

15. *Rapport des vitesses constant :* Pour que le rapport $\frac{v}{a}$ soit constant, il faut que CT varie proportionnellement à tgATD. On est sûr que cette condition est remplie, quand la surface qui limite le corps mobile autour de l'axe est hélicoïde et s'enroule autour de l'axe. En effet, pour toute position du point T sur cette surface, la tangente à l'hélice passant par ce point sur la surface est perpendiculaire à CT, et forme avec l'axe un angle dont la tangente trigonométrique est égale au produit $2\pi \times CT$ divisé par le pas de la surface hélicoïde. Donc :

THÉORÈME. — *Si, de deux surfaces en contact, l'une tourne autour d'un axe et l'autre se meut parallèlement à cet axe, le rapport de la vitesse linéaire de translation*

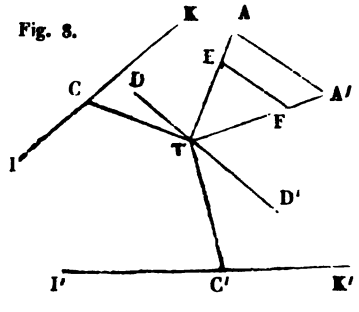
à la vitesse angulaire de rotation est constant quand la surface mobile autour de l'axe est une surface hélicoïde s'enroulant autour de cet axe ; et la valeur constante du rapport est égale au pas de la surface hélicoïde divisé par 2π.

C'est là le principe de l'engrenage de la vis sans fin.

§ 3. — TRANSFORMATION D'UN MOUVEMENT CIRCULAIRE DANS UN MOUVEMENT CIRCULAIRE.

16. CAS GÉNÉRAL. Des deux surfaces s et s′ qui se touchent au point T (fig. 8), la première est mobile

Fig. 8.



autour de l'axe IK avec la vitesse a, et la seconde autour de l'axe I′K′ avec la vitesse a'. Les droites TC et TC′ sont abaissées perpendiculairement du point T sur les axes IK et I′K′. Les droites TA et TA′ représentent les vitesses linéaires des points M et M′ par lesquels se touchent s et s′, et sont ainsi respectivement égales aux produits $a \times$ TC et $a' \times$ TC′.

Prenons sur TA une longueur TE égale à TC, et menons par le point E un plan parallèle au plan tan-

gent commun, coupant TA′ en F. La droite EF étant parallèle à AA′, on a la proportion

$$\frac{TA}{TE} = \frac{TA'}{TF},$$

d'où l'on déduit la suivante :

$$\frac{a}{a'} = \frac{TC'}{TF},$$

qui ramène au rapport de deux droites l'expression du rapport des vitesses angulaires.

17. *Remarque :* La vitesse de glissement ne peut prendre la valeur zéro que si TA et TA′ se confondent, ce qui exige que les axes IK et I′K′ soient situés dans le même plan, et que le point T de contact traverse le plan des axes.

18. Le plan tangent commun coupant le plan des vitesses suivant la droite DD′ parallèle à AA′, la formule (1) du n°. 5 fournit la relation

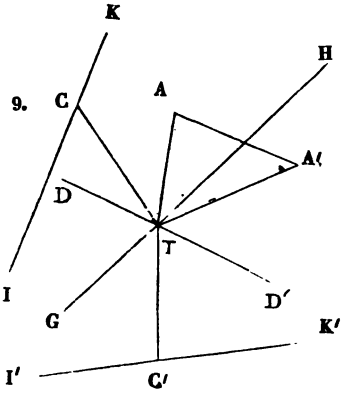
$$\frac{a}{a'} = \frac{TC'}{TC} \times \frac{\sin A'TD'}{\sin ATD},$$

que l'on peut se proposer de transformer.

Appelons pour cela P le plan TIK (fig. 9), P′ le plan TI′K′, et construisons leur intersection GH. La droite GH est perpendiculaire à TA, comme étant située dans P ; elle est perpendiculaire à TA′, comme étant située dans P′ ; elle est donc perpendiculaire au plan ATA′ des vitesses, et par suite à la droite DD′ qui s'y trouve. On peut donc mener suivant GH un

plan Q perpendiculaire à DD′, lequel forme avec les

Fig. 9.



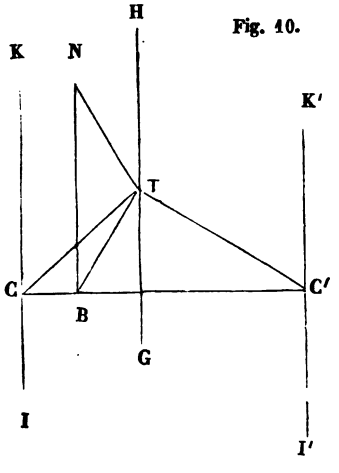
plans P et P′ des angles respectivement égaux à ATD et A′TD′. Ainsi, on peut écrire

$$\frac{a}{a'} = \frac{TC'}{TC} \times \frac{\sin(P',Q)}{\sin(P,Q)}.$$

Le plan Q est le plan normal commun passant par GH.

19. Cas ou les axes de rotation sont parallèles. La droite GH (fig. 10) est alors parallèle aux axes,

Fig. 10.



et par suite perpendiculaire au plan CTC′, qui se confond avec le plan des vitesses. Le plan Q, renfermant GH, est parallèle aux axes. Menons la droite CC′; déterminons le point B de rencontre de CC′ avec le plan Q ; joignons TB. Les angles BTC et BTC′ mesurent les angles dièdres que forme le plan Q avec les plans P et P′. On a donc

$$\frac{a}{a'}=\frac{TC'}{TC}\times\frac{\sin BTC'}{\sin BTC}.$$

Mais, dans les triangles BTC′ et BTC, on a

$$TC'\times\sin BTC'=BC'\times\sin TBC',$$
$$TC\times\sin BTC=BC\times\sin TBC.$$

Il en résulte la relation

$$\frac{a}{a'}=\frac{BC'}{BC}.$$

D'ailleurs, le point B est la projection, sur le plan CTC′, du point N où la normale commune TN perce le plan des axes; en sorte que ce point B est à la même distance des axes que le point N lui-même. Donc :

THÉORÈME. — *Lorsque les deux surfaces qui se conduisent sont respectivement mobiles autour de deux axes parallèles, le rapport des vitesses angulaires de rotation est inverse du rapport des distances de chacun des axes au point où la normale commune perce le plan des axes.*

20. *Nota :* Il serait facile de démontrer que les rotations simultanées sont de sens contraires quand la

normale commune passe entre les deux axes, et de mêmes sens quand elle passe en dehors.

21. *Vitesse de glissement :* Figurons les deux triangles TAA′ et TCC′ situés dans le même plan (fig. 11),

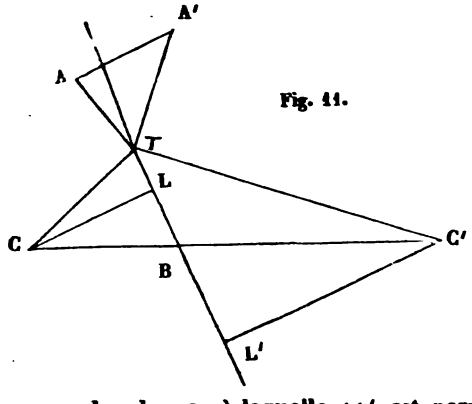


Fig. 11.

et la trace TB du plan Q, à laquelle AA′ est perpendiculaire. Représentons par q la longueur de la droite TB terminée à la droite CC′.

Le triangle TAA′ donne

$$u = v \cos A + v' \cos A',$$

ou

$$u = v \cos CTB + v' \cos C'TB,$$

les angles A et A′ étant respectivement égaux aux angles CTB et C′TB.

Abaissons des points C et C′ sur TB les perpendiculaires CL et C′L′, nous aurons

$$v. \cos CTB = a. CT. \cos CTB = a. TL,$$
$$v'. \cos C'TB = a'. C'T. \cos C'TB = a'. TL';$$

par suite

$$u=a(\text{TB}-\text{BL})+a'(\text{TB}+\text{BL}').$$

Mais on a, d'ailleurs,

$$\frac{a}{a'}=\frac{\text{C'B}}{\text{CB}}=\frac{\text{BL}'}{\text{BL}},$$

ce qui entraîne

$$a.\text{BL}=a'.\text{BL}'.$$

Donc enfin

$$u=q(a+a'),$$

la somme $a+a'$ se changeant en différence quand le point B tombe en dehors des points C et C'. Donc :

THÉORÈME. — *Lorsque les deux surfaces qui se conduisent sont respectivement mobiles autour de deux axes parallèles, la vitesse de glissement de l'une contre l'autre est égale à la somme algébrique des vitesses angulaires, multipliée par la projection, sur un plan perpendiculaire aux axes, de la normale commune terminée au plan des axes.*

22. *Rapport des vitesses constant :* Il résulte du théorême du n°. 19, que le rapport des vitesses de rotation demeure constant quand le point de rencontre de la normale commune avec le plan des axes reste toujours situé sur une même parallèle aux axes.

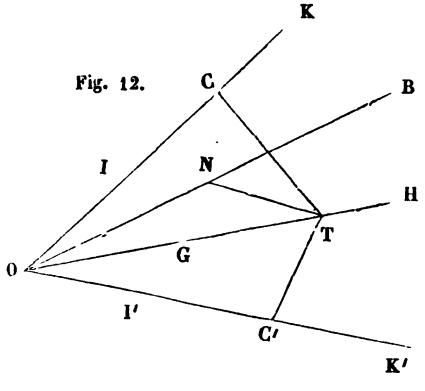
Si les surfaces qui se conduisent consistent dans des cylindres parallèles aux axes, on peut dire que le rapport $\frac{a}{a'}$ des vitesses est constant quand le plan nor-

mal commun mené suivant la génératrice de contact rencontre toujours le plan des axes suivant la même droite, laquelle est parallèle aux axes; et le rapport constant $\frac{a}{a'}$ est inverse du rapport des distances des axes à cette droite, ou, si l'on veut, inverse du rapport des distances des axes au plan normal commun mené suivant la génératrice de contact, ces secondes distances étant proportionnelles aux premières.

C'est sur ce principe que repose la construction géométrique de l'engrenage cylindrique.

23. CAS OU LES AXES DE ROTATION SONT CONCOURANTS. Si les axes IK et I'K' (fig. 12) concourent en

Fig. 12.



un point O, la droite GH d'intersection des deux plans P et P' passe aussi par ce point, et le plan Q coupe le plan des axes suivant une droite OB que rencontre en un certain point N la normale commune.

Appelant i l'angle que forme le plan Q avec le plan

des axes, et qui fait partie du trièdre $\left(O\middle|\begin{matrix}B\\K\\H\end{matrix}\right)$, on a, dans ce trièdre,

$$\frac{\sin(P,Q)}{\sin i}=\frac{\sin BOK}{\sin HOK};$$

et, dans le trièdre $\left(O\middle|\begin{matrix}B\\K'\\H\end{matrix}\right)$,

$$\frac{\sin(P',Q)}{\sin(\pi-i)}=\frac{\sin BOK'}{\sin HOK'}.$$

Il en résulte

$$\frac{\sin(P',Q)}{\sin(P,Q)}=\frac{\sin BOK'}{\sin BOK}\times\frac{\sin HOK}{\sin HOK'}.$$

La formule du n°. 18 devient donc

$$\frac{a}{a'}=\frac{TC'}{TC}\times\frac{\sin BOK'}{\sin BOK}\times\frac{\sin HOK}{\sin HOK'}.$$

Mais

$$\frac{TC'}{TC}\times\frac{\sin HOK}{\sin HOK'}=1;$$

on obtient donc enfin la formule

$$\frac{a}{a'}=\frac{\sin BOK'}{\sin BOK},$$

que l'on énonce en disant :

THÉORÈME. — *Lorsque les deux surfaces qui se conduisent sont respectivement mobiles autour de deux axes concourants, le rapport des vitesses angulaires de rotation*

est inverse du rapport des sinus des angles que forment les axes avec la droite menée de leur point de concours au point où la normale commune perce le plan des axes.

24. *Nota :* Le rapport $\frac{\sin \text{BOK}'}{\sin \text{BOK}}$ étant égal au rapport des distances du point N aux axes OK′ et OK, il en résulte que le présent théorême et celui du n°. 19 ne constituent qu'une seule et même propriété répondant au cas où les deux axes sont situés dans le même plan, qu'ils se rencontrent ou non.

25. *Vitesse de glissement :* La formule générale

$$u = v \cos A + v' \cos A'$$

peut, dans le cas qui nous occupe, s'écrire sous la forme

$$u = a.\text{CT}.\cos(\text{P},\text{Q}) + a'.\text{C}'\text{T}.\cos(\text{P}'\text{Q}),$$

ou

$$u = \text{OT}\{a.\sin \text{HOK}.\cos(\text{P},\text{Q}) + a'.\sin \text{HOK}'.\cos(\text{P}',\text{Q})\}.$$

Or, les trièdres $\left(\text{O}\middle|\begin{matrix}\text{B}\\\text{K}\\\text{H}\end{matrix}\right)$ et $\left(\text{O}\middle|\begin{matrix}\text{B}\\\text{K}'\\\text{H}\end{matrix}\right)$ donnent

$$\sin \text{HOK}.\cos(\text{P},\text{Q}) = \sin \text{HOB}.\cos \text{BOK} + \cos \text{HOB}.\sin \text{BOK}.\cos i,$$
$$\sin \text{HOK}'.\cos(\text{P}',\text{Q}) = \sin \text{HOB}.\cos \text{BOK}' + \cos \text{HOB}.\sin \text{BOK}'.\cos(\pi - i).$$

Substituant ces résultats dans la valeur de u, on obtient

$$u = \text{OT}.\sin \text{HOB}.\{a.\cos \text{BOK} + a'.\cos \text{BOK}'\}$$
$$+ \text{OT}.\cos \text{HOB}.\{a.\sin \text{BOK} - a'.\sin \text{BOK}'\}\cos i.$$

Mais, la seconde ligne de la valeur de u est nulle

en vertu du théorême précédent ; et, dans la première ligne, le produit OT × sin. HOB est égal à la longueur de la perpendiculaire abaissée du point T sur la droite OB. Représentant par q cette longueur, on a donc enfin la formule

$$u = q\{a \cos \text{BOK} + a' \cos \text{BOK}'\}.$$

26. *Rapport des vitesses constant :* Il résulte du théorême du n°. 23, que le rapport des vitesses reste constant quand le point de rencontre de la normale commune avec le plan des axes reste toujours situé sur une même droite passant par le point de concours des axes.

Si les surfaces qui se conduisent consistent dans des cônes ayant pour sommet commun le point de concours des axes, on peut dire que le rapport $\frac{a}{a'}$ des vitesses reste constant quand le plan normal commun mené suivant la génératrice de contact coupe toujours le plan des axes suivant la même droite ; et le rapport constant $\frac{a}{a'}$ est inverse du rapport des sinus des angles que cette droite forme avec les axes, ou, si l'on veut, inverse du rapport des sinus des angles que forment les axes avec le plan normal commun mené suivant la génératrice de contact, puisque ces derniers sinus sont les produits des premiers par sin i.

C'est sur ce principe que repose la construction géométrique de l'engrenage conique.

Caen, typ. de A. HARDEL.

EXTRAIT

DU CATALOGUE DE LA LIBRAIRIE DE A. HARDEL,

IMPRIMEUR-LIBRAIRE, RUE FROIDE, 2,

A CAEN.

ABÉCÉDAIRE ou RUDIMENT D'ARCHÉOLOGIE (architecture religieuse); par M. DE CAUMONT. 1 vol. in-8°. orné de 600 vignettes. Pr. : 7 fr. 50.

ABÉCÉDAIRE ou RUDIMENT D'ARCHÉOLOGIE (architectures civile et militaire), par M. DE CAUMONT. 1 vol. in-8°. orné d'un grand nombre de vignettes. Prix : 7 fr. 50.

COURS D'ANTIQUITÉS MONUMENTALES, par le Même. 6 volumes in-8°. et atlas ; chaque volume se vend séparement avec un atlas. Prix : 12 fr.

BULLETIN MONUMENTAL ou collection de Mémoires et de renseignements pour servir à la confection d'une statistique des monuments de la France, classés chronologiquement, par M. DE CAUMONT, 1re. série, 10 vol. in 8°. ; 2e. série, 10 vol. in-8°. ornés d'un grand nombre de planches. Prix de chacun : 12 fr. On fait une remise aux personnes qui prennent une série entière.

STATISTIQUE MONUMENTALE DU CALVADOS, par M. DE CAUMONT. In-8°. avec planches et un grand nombre de vignettes. Trois volumes ont paru. Prix de chacun: 10 fr.

FLORE DE LA NORMANDIE, par M. DE BRÉBISSON, membre de plusieurs Sociétés savantes. — PHANÉROGAMIE. 1 vol. in-12. Troisième édition. Prix: 6 fr.

GLOSSAIRE DU PATOIS NORMAND, par M. LOUIS DU BOIS ; augmenté des deux tiers, et publié par M. JULIEN TRAVERS. 1 volume in-8°. Prix: 10 fr.

CAEN, PRÉCIS DE SON HISTOIRE, SES MONUMENTS, SON COMMERCE ET SES ENVIRONS ; par M. G.-S. TREBUTIEN. 2e. édition, revue et considérablement augmentée. Prix: 1 fr. 50 c.

GUIDE DES BAIGNEURS, à Trouville et aux environs. Prix : 1 fr. 50 c.

HISTOIRE DE L'ABBAYE DE SAINT-ÉTIENNE DE CAEN (1066-1790). 1 vol. in-4°. avec planches, par M. C. HIPPEAU, professeur à la Faculté des lettres de Caen. Prix : 15 fr.

ÉNUMÉRATION DES INSECTES COLÉOPTÈRES DU DÉPARTEMENT DE LA SEINE-INFÉRIEURE; par E. MOCQUERYS. Prix: 2 fr.

ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE APPLIQUÉE A LA TRANSFORMATION DU MOUVEMENT DANS LES MACHINES; par Ch. GIRAULT. 1 vol. in-8°. Prix : 5 fr.

HISTOIRE DES DUCS ET DU DUCHÉ DE NORMANDIE, par M..... Prix : 1 fr. 50 c.

INTRODUCTION A L'ÉTUDE DE LA CHIMIE, par M. PIERRE. 1 vol. in-8°. Prix : 1 fr. 50 c.

655

CINÉMATIQUE

DE LA

TRANSMISSION DE L'ACCÉLÉRATION

PAR CONTACT IMMÉDIAT ENTRE CORPS SOLIDES

MOBILES AUTOUR D'AXES CONCOURANTS OU PARALLÈLES

PAR

M. Ch. GIRAULT

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE CAEN

CAEN

TYPOGRAPHIE F. LE BLANC-HARDEL, LIBRAIRE

RUE FROIDE, 2 ET 4

1872

855

Alexandre Ziwet 1.1

CINÉMATIQUE

DE LA

TRANSMISSION DE L'ACCÉLÉRATION

PAR CONTACT IMMÉDIAT ENTRE CORPS SOLIDES

MOBILES AUTOUR D'AXES CONCOURANTS OU PARALLÈLES

PAR

M. Ch. GIRAULT

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE CAEN

CAEN

TYPOGRAPHIE F. LE BLANC-HARDEL, LIBRAIRE

RUE FROIDE, 2 ET 4

—

1872

Extrait des Mémoires de l'Académie des Sciences, Arts et Belles-Lettres de Caen.

CINÉMATIQUE.

DE LA

TRANSMISSION DE L'ACCÉLÉRATION

PAR CONTACT IMMÉDIAT ENTRE CORPS SOLIDES MOBILES AUTOUR D'AXES CONCOURANTS OU PARALLÈLES.

§ 1^er^. — DE L'ACCÉLÉRATION TRANSMISE, QUAND LES DEUX CORPS SONT MOBILES AUTOUR D'AXES CONCOURANTS.

ARTICLE 1^er^. — Cas où les corps sont limités par des surfaces coniques S et S', ayant pour sommet commun le point de concours des axes.

1. LEMME. — *Lorsqu'un arc de grand cercle se déplace infiniment peu sur une sphère, les projections, sur les tangentes extrêmes, des vitesses de ses extrémités sont égales et de même sens.*

Soit CC' (fig. 1) cet arc de grand cercle, qui passe à la position infiniment voisine DD'; soient CE et C'E' ses tangentes extrêmes, menées dans le même sens; H et H' les milieux des éléments CD et C'D'; P l'une des intersections des arcs de grand cercle

menés par ces points, perpendiculairement aux éléments.

Si l'on achève de construire les triangles sphériques PCC′ et PDD′, on aperçoit qu'il suffit, pour qu'ils arrivent à coïncider, de faire tourner l'un d'eux autour du pôle P, dans un sens convenable, d'une quantité angulaire exprimée, indifféremment, par le rapport $\frac{CD}{\sin CP}$, ou par le rapport $\frac{C'D'}{\sin C'P}$; en sorte que l'on a la relation

$$\frac{CD}{C'D'} = \frac{\sin CP}{\sin C'P}.$$

Mais le triangle PCC′ donne

$$\frac{\sin CP}{\sin C'P} = \frac{\sin CC'P}{\sin C'CP} = \frac{\cos D'C'E'}{\cos DCE}.$$

Il en résulte la relation

$$\frac{CD}{C'D'} = \frac{\cos D'C'E'}{\cos DCE},$$

qui peut s'écrire encore sous la forme

$$CD \cdot \cos DCE = C'D' \cdot \cos D'C'E'$$

et justifie la propriété énoncée.

2. *Vitesses angulaires simultanées.*

On prend le point de concours des axes pour centre d'une sphère dont le rayon est égal à l'unité. Cette sphère rencontre les axes en des points A et

A′ (fig. 2), et les surfaces S et S′ suivant les lignes ME et M′E′, se touchant en un point T qui se déplace constamment sur ces lignes et sur la sphère. Soient C et C′ les pôles des cercles osculateurs, en T, des lignes ME et M′E′. L'arc de grand cercle CC′ coupe normalement ces lignes au point T et rencontre l'arc de grand cercle AA′ en un point que nous appellerons B ou B′, selon que nous le considérerons comme le sommet du triangle ABC ou comme celui du triangle A′B′C′. Nous poserons :

$$\begin{array}{lll} CAB = A, & ABC = B, & BCA = C, \\ C'A'B' = A', & A'B'C' = B', & B'C'A' = C', \\ BC = \alpha, & CA = \beta, & AB = \gamma, \\ B'C' = \alpha', & C'A' = \beta', & A'B' = \gamma', \\ CT = \rho, & C'T = \rho', & \alpha - \rho = \alpha' + \rho' = \delta; \end{array}$$

et nous remarquerons que $\gamma + \gamma'$ et $B + B'$ sont constants pendant toute la durée du mouvement, la dernière somme étant égale à π.

La figure représentant la position du système à l'origine du temps dt, soient M et M′ les points par lesquels se toucheront les surfaces S et S′ au bout de ce temps dt. Les points M et M′ sont infiniment voisins du point T : en sorte que les arcs de grand cercle CM et C′M′ sont respectivement égaux aux arcs CT et C′T, et normaux, comme eux, aux lignes respectives ME et M′E′. Donc, au bout du temps dt, les arcs CM et M′C′ seront situés sur le prolongement l'un de l'autre, et la distance des points C et C′ sera la même qu'à l'origine du temps dt. Les vitesses angulaires a et a' de rotation des

surfaces S et S′ autour de leurs axes respectifs, varieront donc comme varient celles des points C et C′ tournant autour des pôles respectifs A et A′, sans variation de longueur de l'arc de grand cercle CC′.

Or, la vitesse du point C est égale à $a \sin \beta$, et sa direction forme, avec le premier élément de l'arc CC′, un angle égal au complément de C; elle a donc le produit $a \sin \beta \sin C$ pour expression de sa projection sur ce premier élément, prolongé dans le sens CC′. De même, le produit $a' \sin \beta' \sin C'$ représente la projection de la vitesse du point C′ sur le dernier élément de l'arc CC′, prolongé au-delà du point C′. On a donc, en vertu du lemme précédent, l'égalité

$$a' \sin \alpha' \sin C' = a \sin \alpha \sin C. \qquad (1)$$

Mais, les triangles ABC, A′B′C′ donnent les relations

$$\sin \alpha \sin C = \sin \gamma \sin B,$$
$$\sin \alpha' \sin C' = \sin \gamma' \sin B'.$$

Substituant dans la formule (1), on obtient, après suppression des facteurs égaux sin B et sin B′, la formule

$$a' \sin \gamma' - a \sin \gamma = o, \qquad (2)$$

qui détermine d'une manière simple le rapport des vitesses angulaires.

3. *Accélérations angulaires simultanées.*

Que l'on dérive par rapport au temps les deux

membres de la formule (2), en remarquant que la somme $\frac{d\gamma}{dt}+\frac{d\gamma'}{dt}$ est nulle, on obtiendra l'égalité

$$(3)\quad \frac{da'}{dt}\sin\gamma' - \frac{da}{dt}\sin\gamma = (a'\cos\gamma' + a\cos\gamma)\frac{d\gamma}{dt},$$

qui relie les accélérations angulaires $\frac{da}{dt}$ et $\frac{da'}{dt}$, mais où il reste à remplacer $\frac{d\gamma}{dt}$ par sa valeur.

Or, le triangle ABC donne

$$\cot\beta \sin\gamma = \cos\gamma\cos A + \sin A\cot B,$$

ou

$$\cot\beta = \cot\gamma\cos A + \frac{\sin A\cot B}{\sin\gamma}.$$

Différentiant, ce qui élimine l'angle constant β, on a

$$\frac{dB}{\sin^2 B} = (\cot A\cot B - \cos\gamma)\,dA - (\cot A + \cot B\cos\gamma)\frac{d\gamma}{\sin\gamma}.$$

Substituant

$$dA = a\,dt,\quad \cot A = \frac{\sin\gamma\cot\alpha}{\sin B} - \cot B\cos\gamma,$$

il vient, après simplification et division par dt,

$$\frac{dB}{dt} = (\cot\alpha\cos B\sin\gamma - \cos\gamma)\,a - \cot\alpha\sin B\frac{d\gamma}{dt}.$$

Le triangle A'B'C' donne, de même,

$$\frac{dB'}{dt} = (\cot\alpha'\cos B'\sin\gamma' - \cos\gamma')\,a' - \cot\alpha'\sin B'\frac{d\gamma'}{dt}.$$

On ajoute les deux dernières égalités, en remplaçant, dans la seconde, B' par $\pi - B$, $\frac{dB'}{dt}$ par $-\frac{dB}{dt}$, et $\frac{d\gamma'}{dt}$ par $-\frac{d\gamma}{dt}$; on obtient

$$\frac{d\gamma}{dt}\sin B = \frac{a'\sin\gamma'\cot\alpha' - a\sin\gamma\cot\alpha}{\cot\alpha' - \cot\alpha}\cos B + \frac{a'\cos\gamma' + a\cos\gamma}{\cot\alpha' - \cot\alpha},$$

ou

$$\frac{d\gamma}{dt}\sin B = a\sin\gamma\cos B + \frac{a'\cos\gamma' + a\cos\gamma}{\cot\alpha' - \cot\alpha},$$

en vertu de la formule (2).

La valeur de $\frac{d\gamma}{dt}$ ainsi obtenue, on la substitue dans la relation (3); on remarque que le produit $a\sin\gamma\,(a'\cos\gamma' + a\cos\gamma)$ est égal au produit $aa'\sin(\gamma+\gamma')$, en vertu de la formule (2) déjà invoquée, et l'on arrive alors à la relation définitive

$$(4)\quad \begin{cases} \left(\frac{da'}{dt}\sin\gamma' - \frac{da}{dt}\sin\gamma\right)\sin B = \\ aa'\sin(\gamma+\gamma')\cos B + \frac{(a'\cos\gamma' + a\cos\gamma)^2}{\cot\alpha' - \cot\alpha}, \end{cases}$$

à laquelle nous joindrons les suivantes :

$$(5)\qquad \alpha = \delta + \rho, \quad \alpha' = \delta - \rho'.$$

On voit donc qu'il suffit, pour comparer à chaque instant les accélérations angulaires des surfaces S et S', de connaître à chaque instant la position des pôles C et C' des cercles osculateurs, en T, aux lignes M E et M' E'.

4. *Vitesse de glissement.* — On peut remarquer que, dans le second membre de la formule (4), le dernier terme est proportionnel au carré de la vitesse u de glissement de la ligne ME contre la ligne M'E'. Cela résulte de la formule

$$u = \sin\delta.\,[a'\cos\gamma' + a\cos\gamma], \tag{6}$$

qui trouve sa justification dans un autre mémoire, mais que l'on peut démontrer ici d'une manière plus simple, en partant de l'égalité

$$u\,dt = \mathrm{MT} + \mathrm{M'T},$$

qui détermine l'arc élémentaire de glissement.

Soit I (fig. 3) le point de la sphère dans lequel viennent se confondre, au bout du temps dt, les points M et M', après avoir décrit les arcs MI et M'I en tournant autour des pôles A et A' avec les vitesses a et a'.

La figure TMIM'T peut être assimilée à un triangle élémentaire de côtés MM', IM et IM' respectivement perpendiculaires aux tangentes qui prolongent en T les arcs de grand cercle BT, AT et A'T. Dans ce triangle, on a

$$\mathrm{MM'} = \mathrm{IM}\cos\mathrm{M} + \mathrm{IM'}\cos\mathrm{M'},$$

ou

$$u\,dt = \mathrm{IM}\cos\mathrm{ATB} + \mathrm{IM'}\cos\mathrm{A'TB'}.$$

Substituant à IM et IM' leurs valeurs tirées des formules

$$\mathrm{IM} = a\,dt\sin\mathrm{AT},\quad \mathrm{IM'} = a'\,dt\sin\mathrm{A'T},$$

et supprimant, après substitution, le facteur dt, on obtient

$$u = a \sin AT \cos ATB + a' \sin A'T \cos A'TB'.$$

Dans cette relation, nous exprimerons a et a' au moyen de la quantité auxiliaire b satisfaisant aux conditions

$$a \sin AB = a' \sin A'B' = b,$$

qui impliquent la formule (2). Il viendra

$$u = b\left[\frac{\sin AT}{\sin AB} \cos ATB + \frac{\sin A'T}{\sin A'B'} \cos A'TB'\right],$$

ou

$$u = b \sin B\,[\cot ATB + \cot A'TB'],$$

ou

$$u = b \sin \delta\,[\cot \gamma + \cot \gamma'],$$

en vertu de formules trigonométriques connues. Or on déduit aisément de la dernière relation la formule (6), par l'élimination de l'auxiliaire b.

8. *Scolie.* — Au lieu de donner l'unité pour rayon à la sphère qui a son centre au point de concours des axes, on peut supposer à ce rayon une valeur R quelconque, et désigner par les mêmes lettres δ, ρ, ρ', α, α', β..., les mêmes arcs que ceux définis précédemment, mais considérés ici sur la sphère nouvelle. Les formules (2), (6) et (4) se changent alors évidemment dans les suivantes :

$$(7)\quad \begin{cases} a' \sin\frac{\gamma'}{R} - a\sin\frac{\gamma}{R} = o, \quad \frac{u}{R} = \sin\frac{\delta}{R}\cdot\left[a'\cos\frac{\gamma'}{R} + a\cos\frac{\gamma}{R}\right], \\ \left(\frac{da'}{dt}\sin\frac{\gamma'}{R} - \frac{da}{dt}\sin\frac{\gamma}{R}\right)\sin B = \\ a\,a'\sin\frac{\gamma+\gamma'}{R}\cos B + \frac{\left(a'\cos\frac{\gamma'}{R} + a\cos\frac{\gamma}{R}\right)^2}{\cot\frac{\alpha'}{R} - \cot\frac{\alpha}{R}}, \end{cases}$$

où l'on a

$$(8)\quad \frac{1}{\cot\frac{\alpha'}{R} - \cot\frac{\alpha}{R}} = \frac{\sin\frac{\delta+\rho}{R}\sin\frac{\delta-\rho'}{R}}{\sin\frac{\rho+\rho'}{R}}.$$

ARTICLE 2. — Cas où les deux corps, mobiles autour d'axes concourants, sont limités par des surfaces S et S′ quelconques.

6. Soit O le point de concours des axes, et M un point de la surface S ; on conviendra, pour abréger le langage, d'appeler *plan normal* [O M] le plan qui passe par le point O et par la normale à la surface S au point M ; de même, on appellera *plan normal* [O M′] le plan qui renferme le point O et la normale à S′ menée par le point M′ de S′.

Les deux surfaces S et S′ étant toujours en contact pendant que le mouvement se transmet de l'une à l'autre, nous supposerons que l'on connaît, sur chacune d'elles, le lieu géométrique des points de contact. Si, sur l'un de ces lieux géométriques, on

considère deux points A et B infiniment voisins, les deux plans normaux consécutifs [OA] et [OB], qui leur correspondent, se coupent suivant une droite OC, dont nous supposerons aussi la direction connue, sauf à nous occuper plus loin de cette recherche particulière.

7. Soit T (fig. 4) le point de contact des deux surfaces S et S′ à un certain instant, TE le lieu géométrique des points de contact sur la surface S, TE′ le même lieu géométrique pour la surface S′, M et M′ les points de TE et TE′, par lesquels se toucheront les surfaces S et S′ après un déplacement élémentaire du système. Ces deux points, M et M′, sont nécessairement à égale distance du point O de concours des axes : en sorte que l'élément MM′ est perpendiculaire à la droite OM, et, par conséquent, à la droite OT, infiniment voisine de la première ; d'une autre part, l'élément MM′, joignant les extrémités de deux éléments TM et TM′, situés dans le plan tangent commun, est perpendiculaire à la normale commune issue du point T; l'élément MM′ est donc perpendiculaire au plan normal commun [OT].

Soit OC l'intersection des deux plans normaux consécutifs [OT] et [OM] pour la surface S; OC′ l'intersection des deux plans normaux consécutifs [OT] et [OM′] pour la surface S′; C et C′ les points de rencontre de ces intersections avec une sphère de centre O et d'un rayon égal à l'unité ; t le point de rencontre de la droite OT avec la sphère, situé, avec C et C′, sur un même arc de grand cercle ;

m et m' les points où les droites OM et OM′ percent la sphère ; C m, m m', m'C′ et CC′ les arcs de grand cercle qui joignent deux à deux les points C, m, m', C′. L'élément m m', étant parallèle à MM′, est perpendiculaire au plan normal [OT], et, par suite, à la trace CC′ de ce plan sur la sphère. On conclut aisément de là que la somme des deux arcs C m et C′ m' est égale à l'arc CC′.

Ainsi, après le déplacement élémentaire du système, lorsque les deux points M et M′ seront confondus, aussi bien que les points m et m', et que les plans normaux [OM] et [OM′], lesquels ont pour traces sur la sphère les deux arcs C m et m'C′, on reconnaîtra que ces deux arcs C m et m' C′ viennent se placer sur le prolongement l'un de l'autre, et que la distance des points C et C′ demeure invariable.

Si donc on veut étudier, à un certain instant, les conditions de la transmission du mouvement d'un corps à l'autre, on devra préalablement déterminer, sur la sphère (fig. 5), la position des points t, C et C′, précédemment définis, ainsi que celle des pôles A et A′ de rotation, et faire tourner les points C et C′ autour de leurs pôles respectifs A et A′, sans altérer la grandeur de l'arc CC′ : ce qui ramènera la présente question à celle traitée dans le premier article. En conséquence, on pourra conserver les notations employées dans ce premier article, sauf à substituer le point t de la figure 5 au point T de la figure 2 : auquel cas les formules

$$(2) \qquad a' \sin \gamma' - a \sin \gamma = o,$$

$$(4)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{da'}{dt}\sin\gamma' - \dfrac{da}{dt}\sin\gamma\right)\sin B = \\ aa'\sin(\gamma+\gamma')\cos B + \dfrac{(a'\cos\gamma' + a\cos\gamma)^2}{\cot\alpha' - \cot\alpha}, \end{cases}$$

encore applicables, fourniront, pour des valeurs données de a et $\frac{da}{dt}$, les valeurs correspondantes de a' et $\frac{da'}{dt}$. De même, la formule

$$(6)\qquad u = \sin\delta\,.\,[a'\cos\gamma' + a\cos\gamma]$$

déterminera la vitesse angulaire du glissement des deux surfaces S et S′ l'une contre l'autre, vitesse qu'il faudra multiplier ensuite par la distance du point de contact au point O, pour obtenir la vitesse linéaire.

8. *Recherche des points* C *et* C′. — Il suffira évidemment de s'occuper de l'un de ces points, du point C, par exemple, de la figure 4. Sa position sera connue, si l'on connaît l'angle ρ, que forme la droite OC avec la droite OT, dans le plan normal commun [OT].

Soient MN et TU (fig. 6) les normales à la surface S, menées par les points M et T; elles rencontrent nécessairement la droite OC, intersection des deux plans normaux [OM] et [OT]; soient N et U les points de rencontre. Avec M. Gilbert, nous appellerons courbure de la surface S, en T, suivant TM, le rapport, à l'élément TM, de l'angle aigu i des normales MN et TU; le rapport inverse r, égal

à $\frac{TM}{i}$, sera dit le rayon de la courbure ; enfin, la direction de l'élément TM et celle de la trace du plan tangent en M sur le plan tangent en T, c'est-à-dire la direction de la perpendiculaire commune aux deux normales MN et TU, prendront le nom de directions conjuguées. Ce géomètre a fait voir (1) comment, lorsque la direction TM est donnée, l'autre peut s'en déduire, ainsi que la courbure, pourvu que l'on connaisse les courbures principales de la surface au point T.

Menons par le point N la droite NQ parallèle à UT et prolongée jusqu'à la rencontre en Q du plan tangent en T ; traçons ensuite, dans ce plan, les éléments QM et QT. On peut regarder comme connues les directions de ces éléments : en effet, d'une part, QT est la trace du plan normal commun [OT] sur le plan tangent ; de l'autre, QM, situé dans le plan MNQ, est, comme MN et NQ, perpendiculaire à la direction conjuguée de la direction TM. Ainsi, tous les angles du triangle MQT sont connus ; et, si l'on pose $\frac{QM}{TM} = k$, on peut, dans cette égalité, considérer comme connu le second membre, qui n'est autre qu'un rapport de sinus.

Cela posé, considérons le triangle MNQ, sensiblement isocèle, et dont l'angle en N est égal à i ; il donne $QM = i \cdot QN$.

D'ailleurs on a, par définition de r, l'égalité

$$TM = ir.$$

(1) *Société Philomathique de Paris*, communication faite en octobre 1867.

Il en résulte

$$\frac{QM}{TM} = \frac{QN}{r},$$

et, par suite,

$$QN = kr.$$

Soit considéré maintenant le triangle OTU, dans lequel le côté OT et l'angle OTU sont connus, dont le côté TU diffère infiniment peu de QN, et dont l'angle UOT est précisément égal à ρ. On a, dans ce triangle, la relation

$$\frac{\sin\rho}{\sin(\rho + OTU)} = \frac{kr}{OT},$$

où tout est connu, excepté ρ, et qui détermine cet angle par sa tangente.

§ 2. — DE L'ACCÉLÉRATION TRANSMISE, QUAND LES DEUX CORPS SONT MOBILES AUTOUR D'AXES PARALLÈLES.

9. Supposons d'abord les corps limités par des surfaces cylindriques S et S′, parallèles aux axes de rotation. Les formules relatives à ce cas peuvent être déduites des formules (7), obtenues dans l'article premier du premier paragraphe. Il suffit d'y supposer le rayon R infini, ce qui transporte à l'infini le point de concours des axes.

Comme il vient alors, quel que soit l'arc a, pris sur la surface de rayon R,

$$\lim R \sin\frac{a}{R} = a, \quad \lim \cos\frac{a}{R} = 1;$$

comme la relation (8) donne

$$\lim. \frac{R}{\cot\frac{\alpha'}{R} - \cot\frac{\alpha}{R}} = \frac{(\delta+\rho)(\delta-\rho')}{\rho+\rho'},$$

on en conclut que les formules (7), après multiplication par R, et pour R infini, se transformeront dans les suivantes :

$$(9)\quad \begin{cases} \gamma' a' - \gamma a = o, \quad u = \delta(a+a'), \\ \left(\gamma' \dfrac{da'}{dt} - \gamma \dfrac{da}{dt}\right) \sin B = \\ (\gamma+\gamma') a a' \cos B + \dfrac{(\delta+\rho)(\delta-\rho')}{\rho+\rho'} (a+a')^2, \end{cases}$$

où ρ et ρ' sont les rayons de courbure TC et TC' (fig. 7), répondant au point T de contact des sections ME et M' E', faites dans les surfaces S et S' par le plan de la figure, supposé perpendiculaire aux axes qui le percent aux points A et A'; où δ est la longueur TB de la normale commune interceptée entre le point de contact et la droite AA'; où γ et γ' sont les longueurs des segments que cette normale détermine sur AA'; B l'angle de TB avec AA'; a et a' les vitesses angulaires de rotation autour des centres respectifs A et A'; u la vitesse linéaire de glissement des deux lignes ME et M' E' l'une contre l'autre.

10. Considérons maintenant le cas où les deux corps, mobiles autour de deux axes parallèles, sont limités par des surfaces S et S' quelconques. C'est

le cas traité dans le second article du premier paragraphe, et où l'on supposerait le centre O transporté à l'infini. Les formules (2), (4) et (6) sont donc applicables, aussi bien que les formules (7), qui en découlent, et où l'on peut supposer le rayon R égal à la distance du point O de concours des axes au point de contact T des surfaces S et S′ ; de telle sorte que, si le point O s'éloigne à l'infini, la sphère se transforme en un plan mené par le point T perpendiculairement à la direction commune aux deux axes, en même temps que les formules (7) se transforment dans les formules (9).

Pour définir les quantités B, γ, γ', δ, ρ, ρ', qui entrent dans ces dernières formules, il faut imaginer que l'on mène le plan des deux axes A et A′, et, suivant la normale commune aux deux surfaces, un plan parallèle à ces axes ; B est l'angle des deux plans, que l'on ne pourra confondre avec son supplément, si l'on remarque que l'axe A est situé sur l'une de ses faces et le point T sur l'autre ; δ est la distance de ce point à l'intersection des deux plans ; γ et γ' sont les distances respectives de cette intersection aux axes A et A′.

11. Il reste à définir et à déterminer ρ et ρ'. Pour cela, il faut d'abord considérer, sur les surfaces S et S′, qui se touchent au point T (fig. 8), les lignes TE et TE′, lieux géométriques des points successifs de contact, et, sur ces lignes, les points M et M′ par lesquels doivent se toucher les surfaces au bout du temps dt, l'élément MM′ étant ainsi perpendiculaire aux axes. On mène par le point T la normale com-

mune, et, suivant cette normale, un plan parallèle aux axes ; on mène par les points M et M′ les normales respectives des surfaces S et S′, et, suivant ces normales, des plans parallèles aux axes ; les intersections de ces deux derniers plans avec le précédent sont des droites parallèles aux axes et situées respectivement aux distances ρ et ρ' du point T. C'est ce qui résulte des développements donnés dans le n° 7 et de l'hypothèse qui transporte le point O à l'infini.

Cela posé, soit XX′ (fig. 9) le plan perpendiculaire aux axes, mené par le point T de contact des deux surfaces S et S′ ; soit TE le lieu géométrique, sur S, des points de contact successifs ; M le point de TE par lequel se toucheront les surfaces au bout du temps dt ; MN et TU les normales à S répondant aux points M et T ; CO la perpendiculaire à XX′, suivant laquelle se coupent les plans menés, parallèlement aux axes, par les normales MN et TU, cette droite CO perçant au point C le plan XX′ et rencontrant aux points N et U les deux normales. La droite TC n'est autre que ρ, et sa longueur est égale à TU sin CUT.

Soit la droite NQ parallèle à UT, et rencontrant en Q le plan tangent commun. La longueur TU ne diffère pas sensiblement de QN.

Si l'on joint le point Q aux points M et T, on forme ainsi un triangle élémentaire MQT, dans lequel tous les angles sont connus, puisque ses trois côtés ont des directions connues. En effet, TM est dirigé suivant la tangente en T de l'arc TE ; TQ appartient à la trace du plan CUT sur le plan tangent commun ;

enfin QM est situé sur l'intersection de ce même plan tangent commun avec le plan MQN perpendiculaire à la direction conjuguée de TM sur la surface S, direction conjuguée que l'on sait déterminer si l'on connaît les courbures principales de la surface au point T.

Ces mêmes courbures principales font aussi connaître le rayon r de la courbure de S suivant TM, c'est-à-dire le rapport de l'élément TM à l'angle aigu i des deux normales MN et TU, ou à l'angle MNQ.

Si maintenant on rapproche la relation $TM = ir$, qui définit r, de la formule $QM = i.QN$ fournie par la considération du triangle MNQ sensiblement isocèle, on en déduira l'égalité

$$\frac{QM}{TM} = \frac{QN}{r},$$

dans laquelle le second membre, égal au rapport des sinus de deux angles connus, a une valeur déterminée k : ce qui permet encore d'écrire

$$QN = kr,$$

et conduit à la formule

$$\rho = kr \sin CUT,$$

où CUT représente l'angle de la normale commune avec les axes.

En procédant de la même manière, on obtiendrait pour ρ' une expression de même forme.

Nota. — On peut remarquer que le point C est la

rencontre des projections des normales MN et TU sur le plan XX′ : ce qui conduit à présenter la définition de ρ sous une forme un peu différente. De même pour ρ'.

§ 3. — DE L'ACCÉLÉRATION TRANSMISE, QUAND LA SURFACE S EST MOBILE AUTOUR D'UN AXE, ET LA SURFACE S′ SUIVANT UNE DIRECTION PERPENDICULAIRE A CET AXE.

12. Ce cas est renfermé implicitement dans celui qui fait l'objet du second paragraphe. Si, en effet, on conçoit l'axe A′ (fig. 7) transporté à l'infini, le mouvement de rotation de S′ autour de A′ devient, à la limite, un mouvement de translation rectiligne, perpendiculaire au plan des deux axes A et A′, et par conséquent perpendiculaire à l'axe A, qui n'a pas bougé. Les formules (9) sont donc applicables, pourvu qu'on y suppose a' nul et γ' infini.

Pour le prouver, revenons au second paragraphe, et considérons-y un point L′ quelconque participant au mouvement de la figure S′ autour de l'axe A′. Si v' est la vitesse linéaire de L′, si λ' est sa distance à l'axe A′, on a $a' = \frac{v'}{\lambda'}$; d'où

$$\gamma' a' = \frac{\gamma'}{\lambda'} v', \quad \gamma' \frac{da'}{dt} = \frac{\gamma'}{\lambda'} \frac{dv'}{dt}.$$

Si l'axe A′ se transporte à l'infini, ces formules deviennent les suivantes :

$$\gamma' a' = v', \quad \gamma' \frac{da'}{dt} = \frac{dv'}{dt},$$

où v' est la vitesse de translation de S'.

D'une autre part, le produit $(\gamma + \gamma')\, a a'$, ou son équivalent $\gamma a\,(a + a')$, se réduit à γa^2, puisque a' est nul. Les formules (9) donnent alors

$$(10)\quad \begin{cases} v' = \gamma \cdot a, \quad u = \delta \cdot a, \\ \left(\dfrac{dv'}{dt} - \gamma \dfrac{da}{dt}\right) \sin B = \left[\gamma \cos B + \dfrac{(\delta + \rho)(\delta - \rho')}{\rho + \rho'}\right] a^2. \end{cases}$$

Dans ces dernières formules, on sait ce que représentent a, v' et u; d'une autre part, B est l'angle de deux plans, dont l'un renferme l'axe A de rotation et est perpendiculaire à la direction de la translation, dont l'autre est mené suivant la normale commune et parallèlement à l'axe, cet angle B ne pouvant d'ailleurs être confondu avec son supplément, si l'on remarque que l'axe A et le point T de contact sont situés sur ses faces; δ est la distance du point T à l'intersection des deux plans, et γ la distance de cette intersection à l'axe.

Quant aux quantités ρ et ρ', leur définition exige que l'on distingue le cas où les surfaces S et S' sont des cylindres parallèles à l'axe A, et celui où ces surfaces sont quelconques. Dans le premier cas, ρ et ρ' sont, comme au n° 9, des rayons de courbure; dans le second, ρ et ρ' se définissent et se déterminent comme au n° 10, l'axe A' transporté à l'infini ayant toujours même direction que l'axe A.

§ 4. — DE L'ACCÉLÉRATION TRANSMISE, DANS LE CAS DE DEUX MOUVEMENTS RECTILIGNES.

13. C'est encore là un cas particulier du cas traité au second paragraphe, et les formules (9) y répondent encore. Pour en faire ici l'application, imaginons que les deux axes parallèles, autour desquels tournent les surfaces S et S′, soient perpendiculaires au plan de la figure 10, et le percent aux points A et A′; supposons que le point de contact T des deux surfaces soit situé dans ce plan, sur lequel la normale commune se projettera suivant la droite TB, rencontrant en B la droite AA′: on va transporter à l'infini les points A et A′ sur les droites OZ et OZ′, que la droite TB rencontre en L et L′; le point B s'en ira lui-même à l'infini, et l'angle B tendra vers une certaine limite indéterminée.

Soient v et v' les vitesses respectives des points L et L′, quand on les suppose liés d'une manière invariable, le premier avec la surface S, le second avec la surface S′; les valeurs limites que prendront v et v' sont les vitesses des translations rectilignes dans lesquelles dégénèrent les rotations.

Cela posé, on a

$$a = \frac{v}{AL}, \qquad \gamma a = \frac{AB}{AL} \times v = \frac{\sin L}{\sin B} v,$$

$$a' = \frac{v'}{A'L'}, \qquad \gamma' a' = \frac{A'B}{A'L'} \times v' = \frac{\sin L'}{\sin B} v';$$

d'où, à la limite,

$$(\gamma' a' - \gamma a)\sin B = v' \sin L' - v \sin L,$$

$$\left(\gamma' \frac{da'}{dt} - \gamma \frac{da}{dt}\right)\sin B = \frac{dv'}{dt}\sin L' - \frac{dv}{dt}\sin L,$$

$$(\gamma + \gamma')\, a a' = o;$$

en sorte que la première formule (9) entraîne la condition

$$v' \sin L' = v \sin L. \tag{11}$$

D'une autre part, on a

$$\delta . a = \frac{BL - TL}{AL} v, \quad \delta . a' = \frac{BL' - TL'}{AL'} v',$$

et, à la limite,

$$\delta . a = \frac{\sin ABL}{\sin LAB} v, \quad \delta . a' = \frac{\sin A'BL'}{\sin L'A'B} v',$$

d'où les égalités

$$\delta . a = v\,(\cos L + \sin L \,.\, \cot B),$$
$$\delta . a' = v'(\cos L' - \sin L' \,.\, \cot B),$$

dans lesquelles L, L' et B représentent les angles OLL', OL'L et ABL.

De là on déduit, en tenant compte de la condition (11), la formule

$$\delta . (a + a') = v \cos L + v' \cos L'.$$

Si l'on remarque, enfin, qu'à la limite on peut

remplacer $(\delta+\rho)(\delta-\rho')(a+a')^2$ par $\delta^2.(a+a')^2$, on en conclura que les formules (9) deviennent, après toute substitution,

$$(12)\quad\begin{cases} v'\sin L' - v\sin L = o, \\ u = v\cos L + v'\cos L', \\ \dfrac{dv'}{dt}\sin L' - \dfrac{dv}{dt}\sin L = \dfrac{(v\cos L + v'\cos L')^2}{\rho+\rho'}. \end{cases}$$

14. Pour définir les quantités L, L', ρ, ρ' qui entrent dans ces dernières formules, imaginons que l'on mène, par le point T de contact des surfaces S et S', un plan P parallèle aux directions des vitesses v et v', et, dans ce plan, par un point O quelconque, des droites OZ et OZ' perpendiculaires à ces directions.

Si les surfaces S et S', qui limitent les deux corps, sont des cylindres perpendiculaires au plan P, la normale commune répondant au point T est dans le plan P et détermine, avec les droites OZ et OZ', le triangle OLL', auquel appartiennent les angles L et L' ci-dessus considérés. En même temps, ρ et ρ' désignent, pour le point T, les rayons de courbure des sections faites par le plan P dans les surfaces S et S'.

Si les surfaces S et S' sont quelconques, on projette sur le plan P la normale commune, et l'on considère les angles du triangle OLL' que cette projection forme avec OZ et OZ'. Il faut ensuite recourir aux points M et M', par lesquels se toucheront les surfaces S et S' au bout du temps dt,